Homogene Räume

Übungsblatt 9

1. Zeigen Sie, dass die Liegruppe
$$G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) | a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{GL}(3; \mathbb{R})$$
keine biinvariante Metrik besitzt. Zeigen Sie außerdem: $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ ist nicht reduktiv.

2. Sei G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$. Zeigen Sie:
   (a) Biinvariante Metriken auf G sind vollständig.
   (b) Für die Killing-Form $B_{\mathfrak{g}}$ auf $\mathfrak{g}$ gilt:
   $$B_{\mathfrak{g}} < 0 \Leftrightarrow G \text{ ist kompakt und } \pi_1(G) \text{ ist endlich.}$$
   (c) Geben Sie ein Beispiel an, so dass G kompakt ist, aber $B_{\mathfrak{g}}$ entartet.
   (d) Sei $\langle v, w \rangle_1 := -v_0 w_0 + v_1 w_1 + ... + v_n w_n$ das Minkowski Produkt auf $\mathbb{R}^{1,n} \cong \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist
   $$\mathrm{SO}(1, n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n+1, \mathbb{R}) | det(A) = 1, \langle Av, Aw \rangle_1 = \langle v, w \rangle_1 \}$$
   eine nichtkompakte Liegruppe und die Killingform auf
   $$\mathrm{so}(1, n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x^t \\ x & B \end{pmatrix} | B \in \mathrm{so}(n), x \in \mathbb{R}^n \right\}$$
   ist nicht entartet. Bestimmen Sie π_1 und π_0 von $\mathrm{SO}(1, n)$.

3. Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:
   (a) Die Killingform ist eine symmetrische Bilinearform.
   (b) Ist $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ die adjungierte Darstellung, dann ist die Killingform Ad-invariant.
   (c) $B([X, Y], Z) = B(X, [Y, Z])$.

4. Wir identifizieren wieder $\mathrm{T}_e G$ mit $\mathfrak{g}$. Sei $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine Darstellung der Liegruppe G. Dann ist
$$(d\rho)_e : \mathrm{T}_e G = \mathfrak{g} \to \mathrm{T}_1 \mathrm{Aut}(V) = \mathrm{End}(V)$$
eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{g}$, d.h. $(d\rho)_e$ ist ein Homomorphismus von Liealgebren. Weiterhin gilt:
$$\rho \circ \exp(X) = e^{(d\rho)_e(X)}.$$
(Bemerkung: Ist G einfach zusamenhängend, dann gibt es zu jeder Darstellung $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ der Liealgebra $\mathfrak{g}$ genau eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ der Liegruppe G mit $(d\rho)_e = \sigma$.)