Homogene Räume, WS 2010/11

Mario Listing

7. März 2011

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Liegruppen finden vielseitig Anwendung in der Mathematik und in der Physik, zum Beispiel als Eichgruppen im Standardmodell. Homogene Räume sind Quotienten von Liegruppen und liefern viele Beispiele von Mannigfaltigkeiten mit nicht–trivialer Topologie und nicht–trivialer Geometrie. Symmetrische Räume sind Spezialfälle von homogenen Räumen, wobei die Geometrie eines symmetrischen Raumes eindeutig durch Kenntnis der Krümmung an einem Punkt festgelegt ist. Ein geometrisch sehr anschauliches Beispiel eines homogenen Raumes liefert S^2 als Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. Die spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ wirkt transitiv durch Drehen der Vektoren auf S^2. Die Untergruppe, die den Nordpol $p = (0, 0, 1)$ nicht bewegt, sind die Drehungen der Ebene, d.h. die Isotropiegruppe des Punktes p ist

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \varphi \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{SO}(3).$$

Bereits bekannte Methoden aus der linearen Algebra beweisen durch eine kleine Rechnung, dass die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2) \to S^2,\ A \cdot \mathrm{SO}(2) \mapsto A \cdot p.$$

wohldefiniert und bijektiv ist. Im Verlauf der Vorlesung werden wir eine geeignete Mannigfaltigkeitsstruktur auf Quotientenräumen G/H einführen und zeigen, dass die Abbildung Φ ein Diffeomorphismus ist.

Kapitel 1

Liegruppen

1.1 Gruppenwirkungen

Sei G eine Gruppe und X eine Menge, dann ist eine *Linkswirkung* von G auf X ein Homomorphismus

$$\rho : G \to \mathrm{Bij}(X) = \{f : X \to X \text{ bijektiv}\}.$$

Linkswirkungen bezeichnet man häufig einfach als Gruppenwirkung. Äquivalent dazu kann man eine Linkswirkung duch eine Abbildung

$$G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto g \cdot x$$

mit $e \cdot x = x$ und $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ für alle $g, h \in G$ und $x \in X$ beschreiben. $e \in G$ bezeichnet das neutrale Element in G. Wir benutzen beide Beschreibungen und identifizieren $\rho(g)(x) = g \cdot x$. Analog ist eine *Rechtswirkung* von G auf X ein Antihomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Bij}(X)$ bzw. eine Abbildung $X \times G \to X,\ (x, g) \mapsto x \cdot g$ mit $x \cdot e = x$ und $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$.

Bemerkung 1.1.1. Es gibt eine natürliche Bijektion zwischen Links-und Rechtswirkungen.

Beispiel 1.1.2. *(i) Die lineare Gruppenwirkung (Darstellung): Hier ist X ein Vektorraum und* $\mathrm{GL}(X)$ *die Gruppe der linearen invertierbaren Abbildungen $X \to X$. Eine Linkswirkung $\rho : G \to \mathrm{GL}(X) \subset \mathrm{Bij}(X)$ heißt* Darstellung.

(ii) Die isometrische Gruppenwirkung: Sei (X, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\mathrm{Isom}(X, g)$ *die Isometriegruppe von (X, g), d.h. die Menge der glatten Abbildungen $f : X \to X$ mit $f^*g = g$. Dann wirkt* $\mathrm{Isom}(X, g) \subset \mathrm{Bij}(X)$ *auf X durch $(f, x) \mapsto f(x)$.*

Definition 1.1.3. Sei $\rho : G \to \mathrm{Bij}(X)$ eine Linkswirkung, dann bezeichnet $G \cdot x = \{g \cdot x | g \in G\}$ die *Bahn* bzw. den *Orbit* von x. $X/G := \{G \cdot x | x \in X\}$ heißt der *Orbitraum*. Die *Standgruppe* oder *Isotropiegruppe* von $x \in X$ ist definiert durch $G_x := \{g \in G | g \cdot x = x\}$. Die Wirkung $\rho : G \to \mathrm{Bij}(X)$ heißt *effektiv*, falls $\ker \rho = \{e\}$. Weiterhin heißt ρ *transitiv*, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- Für alle $x, y \in X$ gibt es ein $g \in G$ mit $\rho(g)(x) = g \cdot x = y$.
- $G \cdot x = X$ für ein $x \in X$.
- X/G besitzt genau ein Element.

1.2 Liegruppen

Definition 1.2.1. Eine *Liegruppe* G ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer Gruppenstruktur, so dass die Abbildungen

$$\mathrm{mult} : G \times G \to G,\ (g, h) \mapsto g \cdot h \qquad \text{und} \qquad \mathrm{inv} : G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$$

differenzierbar sind.

Beispiel 1.2.2. *Die Differenzierbarkeit von* mult *und* inv *für die folgenden Beispiele ist offensichtlich (einfache Analysis II Argumente):*

a) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ *und* $\mathbb{H}^n$ *sind abelsche Liegruppen bzgl. der Addition. Hier bezeichnet* $\mathbb{H}$ *die quaternionischen Zahlen, d.h.* $\mathbb{H}$ *ist die* $\mathbb{R}$*–Algebra, die gegeben ist durch*

$$\mathbb{H} := \{a + b\mathbb{i} + c\mathbb{j} + d\mathbb{k} | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

und $\mathbb{i}^2 = \mathbb{j}^2 = \mathbb{k}^2 = -1$ *sowie* $\mathbb{i}\mathbb{j} = \mathbb{k}$. $\mathbb{H}$ *ist ein Schiefkörper, d.h.* $\mathbb{H}$ *erfüllt bis auf die Kommutativität der Multiplikation alle Eigenschaften eines Körpers. Für* $q = a + b\mathbb{i} + c\mathbb{j} + d\mathbb{k} \in \mathbb{H}$ *bezeichnet* $\overline{q} := a - b\mathbb{i} - c\mathbb{j} - d\mathbb{k}$ *das zu* q *konjugierte Element, und*

$$q \cdot \overline{q} = \overline{q} \cdot q = |q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

definiert eine Norm auf $\mathbb{H}$*. Hieraus folgt eine Formel für das multiplikative Inverse von* $q \neq 0$*:* $q^{-1} = \overline{q}/|q|^2$.

b) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *und* $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *sind abelsche Liegruppen bzgl. der Multiplikation.* $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \setminus \{0\}$ *ist eine nicht kommutative Liegruppe bzgl. der Multiplikation.*

c) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} |\ |z|^2 = 1\}$ *ist eine abelsche Liegruppe bzgl. komplexer Multiplikation. Analog kann man* S^1 *auch als Quotient* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *definieren, dann liefert die Addition auf* $\mathbb{R}$ *wieder eine abelsche Gruppenstruktur auf* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

d) Seien G, H *Liegruppen, dann ist auch* $G \times H$ *mit* $(g, h) \cdot (g', h') := (gg', hh')$ *eine Liegruppe. Insbesondere ist*

$$T^n := \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n-mal}$$

eine abelsche Liegruppe.

e) Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, dann ist

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) := \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) |\ A \quad \textit{invertierbar}\}$$

eine Liegruppe bzgl. der Matrixmultiplikation.

Für ein Element $g \in G$ der Liegruppe G definieren wir die

- Linkstranslation: $L_g : G \to G,\ h \mapsto g \cdot h$.
- Rechtstranslation: $R_g : G \to G,\ h \mapsto h \cdot g$.
- Konjugation: $\mathrm{Int}_g : G \to G,\ h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1}$.

Die folgenden Relationen gelten offensichtlich:

$$L_g \circ R_h = R_h \circ L_g, \qquad \mathrm{Int}_g = L_g \circ R_{g^{-1}}, \qquad L_g \circ L_h = L_{gh}, \qquad R_g \circ R_h = R_{hg}.$$

L_g und R_g sind Diffeomorphismen von G, also ist auch Int_g ein Diffeomorphismus mit $(\mathrm{Int}_g)^{-1} = R_g \circ L_{g^{-1}}$. Da $\mathrm{Int}_g : G \to G$ weiterhin ein Gruppenhomomorphismus ist, ist Int_g ein Automorphismus der Liegruppe G. Insbesondere erhalten wir einen Homomorphismus $\mathrm{Int} : G \to \mathrm{Aut}(G),\ g \mapsto \mathrm{Int}_g$.

Satz 1.2.3. *Das Tangentialbündel einer Liegruppe ist trivial: $TG \cong G \times T_eG$.*

Beweis. Sei $\pi : TG \to G$ die Projektion und

$$\Phi : TG \to G \times T_eG,\ v \mapsto (\pi(v), dL_{\pi(v)^{-1}}(v)).$$

Da $(dL_{\pi(v)^{-1}})_h : T_hG \to T_{\pi(v)^{-1}h}G$ invertierbar ist für alle $h \in G$, gilt

$$\Phi^{-1} : G \times T_eG \to TG,\ (g, w) \mapsto (dL_g)_e(w) \in T_gG,$$

d.h. Φ ist ein Bündelisomorphismus. □

Definition 1.2.4. Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G) = \Gamma(TG)$ auf G heißt *linksinvariant*, falls

$$\begin{aligned} & (dL_g)(X) = (L_g)_*(X) = X \qquad \forall g \in G \\ \iff \qquad & (dL_g)_h(X_h) = (L_g)_*(X_h) = X_{gh} \qquad \forall g, h \in G. \end{aligned}$$

Analog bezeichnet man X als rechtsinvariant, wenn $(R_g)_*(X) = X$ für alle $g \in G$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{g}$ die Menge der linksinvarianten Vektorfelder auf G, dann ist $\mathfrak{g}$ offensichtlich ein $\mathbb{R}$–linearer Unterraum von $\mathfrak{X}(G)$.

Satz 1.2.5. *Die Abbildung $\mathfrak{g} \to T_eG,\ X \mapsto X_e = X(e)$ ist ein $\mathbb{R}$–linearer Isomorphismus, insbesondere gilt $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{R}} G$.*

Beweis. Die Abbildung ist offensichtlich $\mathbb{R}$–linear und injektiv, denn $X_e = 0$ liefert $X_g = (dL_g)_e(X_e) = 0$ für alle $g \in G$ (X ist linksinvariant), d.h. $X = 0$. Sei $v \in T_eG$ und $X^v \in \mathfrak{X}(G)$ definiert durch $X^v_g := (dL_g)_e(v) \in T_gG$, dann gilt $X^v_e = v$ und X^v ist linksinvariant:

$$(dL_h)_g(X^v_g) = (dL_h)_g(dL_g)_e(v) = (d(L_hL_g))_e(v) = (dL_{hg})_e(v) = X^v_{hg}.$$

Damit folgt die Surjektivität. □

1.3 Liealgebren und 1–Parametergruppen

Definition 1.3.1. Eine Liealgebra $\mathfrak{p}$ is ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit einer Lieklammer

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \to \mathfrak{p},$$

so dass die folgenden Bedingungen gelten:

(1) $[\ ,\ ]$ ist bilinear.

(2) $[v, w] = -[w, v]$ für alle $v, w \in \mathfrak{p}$.

(3) Jacobi–Identität:

$$[v, [w, z]] + [w, [z, v]] + [z, [v, w]] = 0.$$

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, dann ist der Vektorraum der Vektorfelder $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ auf M zusammen mit der Lieklammer $[\ ,\ ]$ eine Liealgebra:

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(X(f)), \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M),\ f : M \to \mathbb{R} \text{ glatt.}$$

Seien jetzt X, Y linksinvariante Vektorfelder einer Liegruppe G, dann gilt für $g, h \in G$:

$$\begin{aligned}(dL_g)_h[X, Y]_h(f) &= [X, Y]_h(f \circ L_g) = X_h(Y(f \circ L_g)) - Y_h(X(f \circ L_g)) \\ &= X_h(dL_g(Y)f) - Y_h(dL_g(X)f) = X_h(Yf) - Y_h(Xf) \\ &= (X_hY - Y_hX)(f) = [X, Y]_h(f).\end{aligned}$$

Also ist $[X, Y]$ ein linksinvariantes Vektorfeld auf G für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Definition 1.3.2. Sei G eine Liegruppe, dann bezeichnet $\mathfrak{g}$ zusammen mit der Lieklammer von Vektorfeldern die Liealgebra von G. Der Isomorphismus $\mathfrak{g} \to T_eG$, $X \mapsto X_e$ liefert damit auch eine kanonische Liealgebrastruktur auf T_eG.

Wie sieht die Lieklammer zur Liegruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ aus? Da $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ eine offene Teilmenge in $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ ist, kennen wir bereits den Tangentialraum in e bzw. den Vektorraum $\mathfrak{g}$.

Definition 1.3.3. Eine 1–Parametergruppe auf G ist ein differenzierbarer Gruppenhomomorphismus $\gamma : (\mathbb{R}, +) \to G$, d.h. $\gamma(t + s) = \gamma(t)\gamma(s)$ und $\gamma(-t) = \gamma(t)^{-1}$.

Beispiel 1.3.4. $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $t \mapsto e^t$ *und* $(\mathbb{R}, +) \to S^1$, $t \mapsto e^{\mathrm{i}t}$ *sind 1–Parametergruppen.*

Lemma 1.3.5 (Übungsaufgabe)**.** *Die maximalen Integralkurven γ von $X \in \mathfrak{g}$ mit $\gamma(0) = e$ sind 1–Parametergruppen.*

Satz 1.3.6. *Die Abbildung*

$$\{1 - \textit{Parametergruppen auf } G\} \to T_eG,\ \gamma \mapsto \gamma'(0) = (d\gamma)_0(1)$$

ist bijektiv.

Beweis. Sei $v \in T_eG$ und $X^v \in \mathfrak{g}$ gegeben durch $X^v_g := (dL_g)_e(v)$, dann gilt $X^v \in \mathfrak{g}$. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to G$ maximale Integralkurve von X^v mit $\gamma(0) = e$, dann ist γ eine 1–Parametergruppe nach Lemma 1.3.5. Dies zeigt die Surjektivität der Abbildung. Seien nun γ und σ 1–Parametergruppen mit $\gamma'(0) = \sigma'(0)$, dann folgt $\gamma = \sigma$ aus dem Existenz–Eindeutigkeitssatz gewöhnlicher Differentialgleichungen. $\square$

Für $X \in \mathfrak{g}$ bezeichne $\gamma^X : \mathbb{R} \to G$ die 1–Parametergruppe von X, d.h. γ ist die maximale Integralkurve von X mit $\gamma^X(0) = e$ und $(\gamma^X)'(0) = X_e$. Dann gilt $\gamma^{sX}(t) = \gamma^X(st)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$, denn für $h(t) := \gamma^X(st)$ folgt $h'(t) = s(\gamma^X)'(st)$ und damit $h'(0) = sX_e$, d.h. die Eindeutigkeit von Integralkurven liefert die Behauptung.

Definition 1.3.7. Die *Exponentialabbildung* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ ist gegeben durch $\exp(X) = \gamma^X(1)$.

Aus den obigen Betrachtungen und der Tatsache, dass γ^X ein Homomorphismus ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\gamma^X(s) &= \gamma^{sX}(1) = \exp(sX) \\
\exp(-tX) &= \gamma^X(-t) = \gamma^X(t)^{-1} = \exp(tX)^{-1} \\
\exp((s+t)X) &= \gamma^X(s+t) = \gamma^X(s)\gamma^X(t) = \exp(sX)\exp(tX).
\end{aligned}$$

Satz 1.3.8. $\exp$ *ist ein lokaler Diffeomorphismus um* $0 \in \mathfrak{g}$*, d.h. es gibt offene Umgebungen* $U \subset \mathfrak{g}$*,* $V \subset G$ *von* $0 \in \mathfrak{g}$ *bzw.* $e \in G$*, so dass* $\exp_{|U} : U \to V$ *ein Diffeomorphismus ist.*

Beweis. $d\exp_0 : T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \to T_eG \cong \mathfrak{g}$ wird durch

$$(d\exp_0)(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma^X(t) = (\gamma^X)'(0) = X$$

gegeben, d.h. $d\exp_0 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ist die Identität und damit invertierbar. Aus dem Umkehrsatz folgt damit die Behauptung. $\square$

Beispiel 1.3.9. *Sei* $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ *und definiere*

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \qquad \textit{mit} \quad A^0 = \mathrm{Id}$$

für $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$*. Wählt man eine Algebrennorm* $\|.\|$ *auf* $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$*, so folgt aus* $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$ *die absolute Konvergenz der Reihe, d.h.* e^A *ist wohl definiert.*

Weiter liefert $e^A \cdot e^{-A} = \mathrm{Id}$ *die Invertierbarkeit:* $e^A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. *Betrachtet man jetzt den kanonischen Isomorphismus* $\mathfrak{g} \cong \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$, *so gilt*

$$\exp : \mathfrak{g} \cong \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), \; A \mapsto e^A,$$

was die Bezeichnung Exponentialabbildung rechtfertigt.

Beweis. $\phi(t) := e^{tA}$ ist die 1-Parametergruppe von A, da $\phi(0) = \mathrm{Id} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ und

$$\begin{aligned} \phi(t+s) &= e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA} = \phi(t)\phi(s) \\ \phi'(0) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tA} = A \end{aligned}$$

(hier benutzen wie das Additionstheorem $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$, falls $AB = BA$). Damit erhalten wir $\exp(A) = \phi(1) = e^A$. □

Lemma 1.3.10. *Für* $X, Y \in \mathfrak{g}$ *gilt*

$$[X, Y]_e = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[\left(d\mathrm{Int}_{\gamma^X(t)} \right)_e (Y_e) \right].$$

Beweis. Sei $\Psi : I \times G \to G$ der Fluß von X, d.h. $\Psi(0, g) = g$ und $\Psi'(t, g) = X_{\Psi(t,g)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $g \in G$. Die Lieklammer von Vektorfelder stimmt mit der Lieableitung überein:

$$[X, Y] = L_X Y = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Psi_*(-t, .)(Y_{\Psi(t,.)}).$$

Der Fluß eines linksinvarianten Vektorfeldes X ist offensichtlich gegeben durch (Übungaufgabe):

$$\Psi(t, g) = g \cdot \exp(tX), \qquad \text{d.h.} \quad \Psi(t, .) = R_{\exp(tX)}.$$

Damit erhalten wir aus der Linksinvarianz von Y:

$$\begin{aligned} [X, Y]_g &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[(R_{\exp(-tX)})_* (Y_{g \cdot \exp(tX)}) \right] \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[(R_{\exp(-tX)})_* (L_g \circ L_{\exp(tX)})_* (Y_e) \right] \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[(R_{\exp(-tX)} L_g L_{\exp(tX)})_* (Y_e) \right] \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[(L_g \circ \mathrm{Int}_{\exp(tX)})_* (Y_e) \right] \\ &= (L_g)_* \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[(\mathrm{Int}_{\exp(tX)})_* (Y_e) \right] \end{aligned}$$

Für $g = e$ folgt die Behauptung. □

Korollar 1.3.11. *Sei $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ dann ist die Liealgebrastruktur auf $\mathfrak{g} \cong T_eG \cong \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ gegeben durch:*

$$[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X,$$

wobei $X \cdot Y$ die Matrixmultiplikation meint.

Beweis. Es gilt

$$(d\mathrm{Int}_{e^A})_{\mathrm{Id}}(B) = \lim_{s \to 0} \frac{\mathrm{Int}_{e^A}(\mathrm{Id} + sB) - \mathrm{Int}_{e^A}(\mathrm{Id})}{s} = \mathrm{Int}_{e^A}(B) = e^A B e^{-A},$$

d.h. das obige Lemma zeigt

$$[A, B]_{\mathfrak{g}} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (d\mathrm{Int}_{e^{tA}})_{\mathrm{Id}}(B) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(e^{tA} B e^{-tA}\right) = AB - BA.$$

□

Definition 1.3.12. 1) Ein *Liegruppenhomomorphismus* ist ein differenzierbarer Gruppenhomomorphismus $G \to H$ von Liegruppen G und H.

2) Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ Liealgebren, dann heißt eine lineare Abbildung $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein *Liealgebrenhomomorphismus*, wenn

$$\varphi([v, w]_{\mathfrak{g}}) = [\varphi(v), \varphi(w)]_{\mathfrak{h}}$$

für alle $v, w \in \mathfrak{g}$ gilt.

Satz 1.3.13. *Sei $\psi : G \to H$ ein Liegruppenhomomorphismus, dann ist*

$$(d\psi)_e : T_eG \cong \mathfrak{g} \to T_eH \cong \mathfrak{h}$$

ein Liealgebrenhomomorphismus mit $\psi(\exp X) = \exp(d\psi(X_e))$.

Beweis. Man beachte, dass für ein Vektorfeld X auf G, $d\psi(X)$ im Allgemeinen kein Vektorfeld auf H definiert. Deshalb führen wir den Begriff der ψ–Verwandtschaft ein. Ein Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(H)$ heißt ψ–verwandt zu $X \in \mathfrak{X}(G)$, wenn

$$Y_{\psi(g)} = d\psi_g(X_g) = \psi_*(X_g)$$

gilt. Für Y ψ–verwandt zu X und $f : H \to \mathbb{R}$ glatt gilt

$$(Yf)_{\psi(g)} = df(Y)_{\psi(g)} = df(d\psi(X_g)) = d(f \circ \psi)_g(X_g) = X(f \circ \psi)_g,$$

d.h. die Gleichung $(Yf) \circ \psi = X(f \circ \psi)$ ist äquivalent zur ψ–Verwandtschaft von Y und X. Sei weiter $\bar{Y}$ ψ–verwandt zu $\bar{X}$, dann erhalten wir die ψ–Verwandtschaft von $[Y, \bar{Y}]$ und $[X, \bar{X}]$:

$$\begin{aligned}
[Y, \bar{Y}](f) \circ \psi &= Y(\bar{Y}f) \circ \psi - \bar{Y}(Yf) \circ \psi = X(\bar{Y}f \circ \psi) - \bar{X}(Yf \circ \psi) \\
&= X(\bar{X}(f \circ \psi)) - \bar{X}(X(f \circ \psi)) = [X, \bar{X}](f \circ \psi).
\end{aligned}$$

Seien jetzt $X_g := dL_g(X_e)$ und $Y_h := dL_h(Y_e)$ die linksinvarianten Vektorfelder von $X_e \in T_eG$ und $Y_e = (d\psi)_e(X_e) \in T_eH$, dann ist Y ψ verwandt zu X:

$$\begin{aligned} d\psi(X_g) &= d\psi(dL_g(X_e)) = d(\psi \circ L_g)(X_e) \\ &= d(L_{\psi(g)} \circ \psi)(X_e) = dL_{\psi(g)}(Y_e) = Y_{\psi(g)} \end{aligned}$$

(ψ ist ein Gruppenhomomorphismus: $\psi \circ L_g = L_{\psi(g)} \circ \psi$). Seien jetzt X, $\bar{X}$ die linksinvarianten Vektorfelder zu $X_e, \bar{X}_e \in T_eG$ und Y, $\bar{Y}$ die linksinvarianten Vektorfelder zu $d\psi(X_e)$ sowie $d\psi(\bar{X}_e)$, dann folgt aus den obigen Rechnungen

$$[d\psi_e(X_e), d\psi_e(\bar{X}_e)]_{T_eH} = [Y, \bar{Y}]_e = d\psi_e([X, \bar{X}]_e) = d\psi_e([X_e, \bar{X}_e]_{T_eG}).$$

Sei γ^X die 1–Parametergruppe von $X \in \mathfrak{g}$ und $Y \in \mathfrak{h}$ das zu X ψ–verwandte Vektorfeld (d.h. Y ist bestimmt durch $Y_e = d\psi(X_e)$), dann folgt $\psi \circ \gamma^X = \gamma^Y$ wegen $(\psi \circ \gamma^X)' = (\gamma^Y)'$ und $\psi(\gamma^X(0)) = \gamma^Y(0) = e$, d.h.

$$\psi(\exp X) = \psi(\gamma^X(1)) = \gamma^Y(1) = \exp(Y) = \exp(d\psi(X_e)).$$

□

Wir betrachten jetzt den Liegruppendiffeomorphismus $\mathrm{Int}_g : G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$. Die Ableitung von Int_g in $e \in G$ ist also ein Isomorphismus von Liealgebren:

$$(d\mathrm{Int}_g)_e : T_eG \cong \mathfrak{g} \to T_eG \cong \mathfrak{g}.$$

Dies liefert die Adjungierte Darstellung einer Liegruppe auf ihrer Liealgebra:

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}),\ \ g \mapsto (d\mathrm{Int}_g)_e.$$

Eine kleine Rechnung zeigt, dass dies in der Tat eine Darstellung ist. Betrachtet man jetzt die Ableitung von Ad an der Stelle $e \in G$ und identifiziert T_eG mit $\mathfrak{g}$ sowie $T_e\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ mit $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ wie üblich, so erhält man die adjungierte Darstellung der Liealgebra auf sich:

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}),\ \ X \mapsto \mathrm{ad}_X = (d\mathrm{Ad})_e(X).$$

Satz 1.3.14. $\mathrm{ad}_X Y = [X, Y]$.

Beweis.

$$\mathrm{ad}_X Y = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\mathrm{Int}_{\exp tX}(Y) = [X, Y]$$

(vgl. Lemma 1.3.10). □

1.4 Untergruppen und Unteralgebren

Definition 1.4.1. Ein Unterraum $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{p}$ einer Liealgebra $\mathfrak{p}$ heißt *Lieunteralgebra*, falls $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. Eine Untergruppe $H \subseteq G$ einer Liegruppe G heißt *Lieuntergruppe*, wenn H eine (reguläre) Untermannigfaltigkeit von G ist.

Bemerkung 1.4.2. In der Literatur wird der Begriff der Lieuntergruppe häufig anders definiert. Eine Lieuntergruppe H von G ist dann oft nur ein injektiver Homomorphismus $H \to G$ von Liegruppen (vgl. [1, 3]). Wir verlangen aber zusätzlich, dass $H \to G$ eine Einbettung ist. Man beachte dabei, dass in der Literatur auch der Begriff der Untermannigfaltigkeit nicht eindeutig ist, in vielen Fachbüchern sind Untermannigfaltigkeiten durch injektive Immersionen gegeben, d.h. in diesen Fällen wird die Topologie des umgebenden Raumes nicht vererbt. Unsere Definition hat den Vorteil, dass $H \subseteq G$ die Gruppeneigenschaft und die Mannigfaltigkeitsstruktur von G erbt, und sich damit viele der Aussagen über homogene Räume vereinfachen. Der Nachteil ist, dass Lieunteralgebren $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ existieren, für die es keine Lieuntergruppe $H \subseteq G$ gibt. Insbesondere sind in unserem Fall, 1–Parametergruppen im Allgemeinen keine Lieuntergruppen.

Satz 1.4.3. *Sei $H \subseteq G$ eine Lieuntergruppe, dann ist $T_eH \subseteq T_eG$ eine Lieunteralgebra.*

Beweis. Betrachte die Einbettung $i : H \to G$, dann ist $(di)_e : T_eH \to T_eG$ die Einbettung des Unterraumes $T_eH \subseteq T_eG$, und nach Satz 1.3.13 ein Liealgebrenhomomorphismus. □

Bemerkung 1.4.4. Die Umkehrung dieser Aussage ist mit unserer Definition einer Lieuntergruppe im Allgemeinen falsch, d.h. zu einer Lieunteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ gibt es im Allgemeinen keine Lieuntergruppe $H \subseteq G$ mit Liealgebra $\mathfrak{h}$. Zum Beispiel besitzt die Liegruppe $G = S^1 \times S^1$ die abelsche Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ mit $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$. Sei $\gamma(t) := (e^{2\pi r \mathrm{i} t}, e^{2\pi \mathrm{i} t})$ mit $r \in \mathbb{R}$, dann gilt $\gamma'(0) = (2\pi r, 2\pi)$. γ ist eine 1–Parametergruppe und $\mathrm{Im}(\gamma) \subset G$ ist dicht in G für $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\mathfrak{h} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{(r, 1)\}$ ist eine 1–dimensionale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Sei also $H \subseteq G$ eine Lieuntergruppe mit Liealgebra $\mathfrak{h}$, dann gilt $\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq H$. Da $\mathrm{Im}(\gamma)$ dicht in G ist, folgt $\overline{H} = G$. Dies liefert einen Widerspruch: $\dim H = \dim \overline{H} = 2$ aber $\dim \mathfrak{h} = 1$. Im Fall $r \in \mathbb{Q}$ ist $\mathrm{Im}(\gamma)$ eine 1–dimensionale Lieuntergruppe von G mit Liealgebra $\mathfrak{h}$.

Man kann aber folgendes zeigen: Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra, dann trägt $H = \exp(\mathfrak{h})$ eine Struktur als Liegruppe, so dass die Inklusionsabbildung $i : H \to G$ eine injektive Immersion ist. Das Bild $i(H) \subseteq G$ muss aber keine Untermannigfaltigkeit von G sein.

Theorem 1.4.5. *Sei G eine Liegruppe und $H \subseteq G$ eine algebraische Untergruppe von G. Dann ist H genau dann eine Lieuntergruppe, wenn H in G (topologisch) abgeschlossen ist.*

Korollar 1.4.6. *Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe der Liegruppe G, dann ist $\overline{H}$ eine Lieuntergruppe von G.*

Beweis. Da die Multiplikation stetig ist, ist $\overline{H}$ eine Untergruppe von G, d.h. das Korollar ist eine einfache Folgerung des Theorems. Den Beweis des Theorems führen wir wie in [3, Theorem 3.11 Chp. I].

Sei jetzt $H \subseteq G$ eine Lieuntergruppe, dann ist H Untermannigfaltigkeit und es gibt eine offene Umgebung $U \subset G$ von $e \in G$ mit $H \cap U \subset U$ abgeschlossen.

Sei $h \in \overline{H}$ beliebig, dann gibt es eine Folge $H \ni h_j \to h \in \overline{H}$ und damit $h_j^{-1}h \to e$. Insbesondere gibt es ein j mit $h_j^{-1}h \in U$, d.h.

$$h_j^{-1}h \in \overline{H} \cap U = H \cap U$$

zeigt $h \in H$. Damit erhalten wir $H = \overline{H}$.

Sei umgekehrt H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Zu zeigen: Es gibt eine offene Umgebung U von $e \in G$, so dass $U \cap H$ eine Untermannigfaltigkeit von U ist. Wähle Umgebungen $0 \in V \subseteq \mathfrak{g}$ und $e \in U \subseteq G$ derart, dass $\exp_{|V} : V \to U$ ein Diffeomorphismus ist. Wir bezeichnen mit $\log : U \to V$ die zugehörige Umkehrabbildung. Wähle ein Euklidisches Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$ und setze $V' := \log(U \cap H) \subset V$, dann erhalten wir die Behauptung aus den folgenden Fakten:

(i) Sei $V' \ni h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ mit $\frac{h_n}{|h_n|} \to X \in \mathfrak{g}$, dann gilt $\exp(tX) \in H$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(ii) $W = \{sX |\ X = \lim \frac{h_n}{|h_n|}, h_n \in V', s \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathfrak{g}$ ist ein Unterraum.

(iii) $\exp(W)$ ist eine Umgebung der Eins in H.

Zu (i): Wegen $\frac{t}{|h_n|}h_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} tX$ und $|h_n| \to 0$ gibt es $m_n \in \mathbb{Z}$ mit $m_n|h_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} t$, d.h.

$$H \ni \exp(h_n)^{m_n} = \exp(m_n \cdot h_n) = \exp\left(m_n|h_n| \cdot \frac{h_n}{|h_n|}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(tX),$$

und da H abgeschlossen ist, folgt $\exp(tX) \in H$.

Zu (ii): Dazu benötigen wir, dass das Differential von $\mathrm{mult} : G \times G \to G$ and der Stelle (e, e) durch $T_eG \oplus T_eG \to T_eG$, $(X, Y) \mapsto X + Y$ gegeben ist. Seien $X, Y \in W$ und $h(t) = \log(\exp(tX) \cdot \exp(tY))$, dann ist der Grenzwert von $h(t)/t$ für $t \to 0$ gegeben durch $X + Y$, d.h. es gilt

$$\frac{h(t)}{|h(t)|} = \frac{h(t)}{t} \cdot \frac{t}{|h(t)} \overset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{X+Y}{|X+Y|}$$

und damit folgt (ii).

Zu (iii): Sei $W^\perp$ das orthogonale Komplement von W bzgl. des gewählten Skalarproduktes auf $\mathfrak{g}$ und betrachte die Abbildung

$$\beta : W \oplus W^\perp \to G,\ (X, Y) \mapsto \exp(X) \cdot \exp(Y).$$

Offensichtlich gilt $d\beta_{(0,0)} : W \oplus W^\perp \to \mathfrak{g}$, $(X, Y) \mapsto X + Y$, d.h. β is lokal invertierbar im Punkt $(0, 0)$. Annahme (iii) ist falsch. Wähle eine Folge $(X_n, Y_n) \in W \oplus W^\perp$ mit $\exp(X_n) \cdot \exp(Y_n) \in H$, $Y_n \neq 0$ und $(X_n, Y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Da $W^\perp$ ein Unterraum ist, konvergiert eine Teilfolge von $Y_n/|Y_n|$ gegen $Y \in W^\perp \setminus \{0\}$ mit $|Y| = 1$. Da weiterhin $\exp(X_n) \in H$ und $\exp(X_n) \cdot \exp(Y_n) \in H$ für alle n, ist auch $\exp(Y_n) \in H$, d.h. $0 \neq Y \in W$ was einen Widerspruch zu $0 \neq Y \in W^\perp$ liefert. $\square$

1.5 Beispiele von Matrixliegruppen mit Liealgebren

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, dann ist $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ eine Liegruppe bzgl. Matrixmultiplikation mit Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$. Die Lieklammer auf $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ ist durch

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A, \qquad A, B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}).$$

gegeben. Die folgenden Beispiele sind Lieuntergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, insbesondere erben die entsprechenden Lieunteralgebren die Liealgebrastruktur von $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$.

(i) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann ist die *spezielle lineare Gruppe*

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) | \ \det A = 1\}$$

eine Lieuntergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. Da $\det : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine stetige Abbildung ist, ist das Urbild von 1 eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. Da weiterhin $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ differenzierbar ist mit Differential

$$(d\det)_{\mathrm{Id}} : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \ A \mapsto \mathrm{tr}(A),$$

erhalten wir die Liealgebra von $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$:

$$\mathrm{sl}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) | \ \mathrm{tr}(A) = 0\} = \ker(d\det)_{\mathrm{Id}}.$$

(ii) Die *orthogonale* und *spezielle orthogonale Gruppe*

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &= \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) | \ A^t A = \mathrm{Id}\} \\ \mathrm{SO}(n) &= \{A \in \mathrm{O}(n) | \ \det A = 1\}. \end{aligned}$$

sind Lieuntergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, da die Matrixmultiplikation und det stetig sind. Die Abbildung $f : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}), \ \ A \mapsto A^t A$ ist differenzierbar und $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(\mathrm{Id})$, d.h. die Liealgebra von $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$ ist durch $\ker(df_{\mathrm{Id}})$ gegeben:

$$df_{\mathrm{Id}}(B) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (\mathrm{Id}^t + sB^t)(\mathrm{Id} + sB) = B^t + B$$

Damit erhalten wir die Liealgebren

$$\mathrm{so}(n) = \mathrm{o}(n) = \{B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) | \ B + B^t = 0\}$$

und $\dim \mathrm{O}(n) = \dim \mathrm{SO}(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

(iii) Die *unitäre Gruppe*

$$\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) | \ A^* A = \mathrm{Id}\}$$

ist Lieuntergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Analog zu (ii) erhält man die zugehörige Liealgebra

$$\mathrm{u}(n) = \{B \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})|\ B^* + B = 0\}$$

und damit $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{U}(n) = n^2$. Die *spezielle unitäre Gruppe* $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ ist Lieuntergruppe von $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ und $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Die Liealgebra wird durch

$$\mathrm{su}(n) = \mathrm{u}(n) \cap \mathrm{sl}(n) = \{B \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})|\ B^* + B = 0, \mathrm{tr}(B) = 0\}$$

bestimmt, insbesondere gilt $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{SU}(n) = n^2 - 1$.

(iv) Die *symplektische Gruppe*

$$\mathrm{Sp}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{H})|\ AA^* = \mathrm{Id},\ A^*A = \mathrm{Id}\} \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$$

ist abgeschlossen in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$. Wie im Komplexen Fall bezeichnet $*$ Transponieren der Matrix und Konjugieren der Matrixeinträge. Betrachtet man die Abbildung $f : \mathrm{Mat}(n,\mathbb{H}) \to \mathrm{Sym}(n,\mathbb{H}),\quad A \mapsto AA^* + A^*A$, dann ist $\mathrm{Sp}(n) = f^{-1}(2\mathrm{Id})$ und die Liealgebra von $\mathrm{Sp}(n)$ ist durch $\ker(df_{\mathrm{Id}})$ bestimmt. Damit erhalten wir

$$\mathrm{sp}(n) = \{B \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{H})|\ B^* + B = 0\}$$

und $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Sp}(n) = 4\frac{n(n-1)}{2} + 3n = n(2n+1)$. In der Literatur wird zum Teil die *komplexe symplektische Gruppe* auch mit dem Symbol $\mathrm{Sp}(n)$ bezeichnet. Wir benutzen aber die Schreibweise

$$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})|\ A^tJA = J\}$$

wobei $J := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$. Die reelle Dimension dieser Liegruppe ist auch $n(2n+1)$ aber $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ ist im Gegensatz zu $\mathrm{Sp}(n)$ eine nicht kompakte Liegruppe.

Bemerkung 1.5.1. a) $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ und $\mathrm{Sp}(n)$ sind kompakte Liegruppen.

b) $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{K})$ und $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ sind nicht kompakt für $n \geq 1$.

c) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$ und $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ sind zusammenhängend.

d) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und $\mathrm{O}(n)$ besitzen 2 Zusammenhangskomponenten.

Übung 1.5.2. $\mathrm{O}(2n+1)$ und $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(2n+1)$ sind isomorph als Liegruppen. $\mathrm{O}(2n)$ ist diffeomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(2n)$ als Mannigfaltigkeit, es gibt aber keinen Liegruppenisomorphismus. Weiterhin gilt $\mathrm{U}(n) \approx \mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(n)$ als Mannigfaltigkeit.

Übung 1.5.3. Es gilt $S^3 = \mathrm{Sp}(1) = \mathrm{SU}(2)$.

Kapitel 2

Homogene Räume

2.1 Quotientenräume

Theorem 2.1.1. *Sei G eine Liegruppe und $H \subseteq G$ eine Lieuntergruppe. Dann trägt der Orbitraum G/H eine eindeutige Struktur als Mannigfaltigkeit bezüglich der $\pi : G \to G/H$ eine (surjektive) Submersion ist, d.h. $d\pi_g : T_gG \to T_{gH}G/H$ ist surjektiv für alle $g \in G$. Insbesondere gilt $\dim G/H = \dim G - \dim H$, und $H \hookrightarrow G \to G/H$ ist ein differenzierbares Faserbündel.*

Beweis. (1) Wir definieren auf G/H die Quotiententopologie, d.h. $U \subset G/H$ ist genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subset G$ offen ist. Zu zeigen: diese Topologie ist Hausdorff. Sei $xH \neq yH$ in G/H, dann gilt $x \notin yH$ und es gibt eine offene Umgebung $e \in U \subset G$ mit $Ux \cap yH = \emptyset$ (hier benutzen wir, dass H bzw. yH abgeschlossen in G sind). Die Multiplikation mult : $G \times G \to G$ ist stetig, d.h. es gibt offene Umgebungen $A, B \subset G$ der Eins mit $A \times B \subset \text{mult}^{-1}(U)$. Setze $V := A \cap B$, dann ist $\emptyset \neq V \subset G$ offen mit $V^2 = \{x \cdot y \in G | x, y \in V\} \subseteq U$ und $V^2x \cap yH = \emptyset$. Damit erhalten wir $Vx \cap V^{-1}yH = \emptyset$ sowie $VxH \cap V^{-1}yH = \emptyset$, d.h. $\pi(VxH) \cap \pi(V^{-1}yH) = \emptyset$. Dies liefert die Hausdorff Eigenschaft, denn $\pi(VxH)$ ist offene Umgebung von $xH \in G/H$ und $\pi(V^{-1}yH)$ ist offene Umgebung von yH in G/H.

(2) Wähle jetzt ein Euklidisches Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$ und sei $V \subseteq \mathfrak{g}$ das orthogonale Komplement zur Lieunteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Sei $V_\epsilon = \{X \in V | \, |V| < \epsilon\}$ und $D_\epsilon := \exp(V_\epsilon) \subset G$. Behauptung: Für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ ist

$$\mu : D_\epsilon \times H \to G, \ (g, h) \mapsto g \cdot h$$

eine offene Einbettung. Da $d\mu_{(e,e)} : T_eD_\epsilon \times T_eH \to T_eG, \ (X, Y) \mapsto X + Y$ invertierbar ist, gibt es für hinreichned kleines $\epsilon > 0$ eine offene Umgebung $e \in U_\epsilon \subset H$, so dass $\mu : D_\epsilon \times U_\epsilon \to D_\epsilon \cdot U_\epsilon$ ein Diffeomorphismus ist. Wegen

$$\mu_{|D_\epsilon \times U_\epsilon h} = R_h \circ \mu_{|D_\epsilon \times U_\epsilon} \circ R_{h^{-1}}$$

für alle $h \in H$ folgt damit: $\mu : D_\epsilon \times H \to G$ ist lokaler Diffeomorphismus. Noch zu zeigen: μ ist injektiv für ϵ hinreichend klein. Wähle eine offene Umgebung

$e \in Z_\epsilon \subset G$ mit $Z_\epsilon \cap H \subseteq U_\epsilon$, dann gibt es offene Umgebung $\tilde{Z}_\epsilon$ der Eins in G mit $\tilde{Z}_\epsilon^{-1} \cdot \tilde{Z}_\epsilon \subset Z_\epsilon$ (wie in Teil (1), $G \times G \to G$ mit $(g,h) \mapsto g^{-1}h$ ist stetig, also existiert $\tilde{Z}_\epsilon$). Wähle $\epsilon' \leq \epsilon$ derart, dass $D_{\epsilon'} \subset \tilde{Z}_\epsilon$. Seien $d_1, d_2 \in D_{\epsilon'}$ und $h_1, h_2 \in H$ mit $d_1h_1 = d_2h_2$, dann gilt

$$h := d_1^{-1}d_2 = h_1h_2^{-1} \in H \cap Z_\epsilon \subseteq U_\epsilon$$

Jetzt benutzen wir, dass $\mu : D_\epsilon \times U_\epsilon \to D_\epsilon \cdot U_\epsilon$ ein Diffeomorphismus ist: $\mu(d_1, h) = \mu(d_2, e)$ liefert $h = h_1h_2^{-1} = e$ und $d_1 = d_2$. Mit dem ϵ' wird $\mu : D_{\epsilon'} \times H \to G$ eine offene Einbettung.

(3) Wir betrachten jetzt die offenen Mengen $U_g = (gD_\epsilon)H \subset G$, dann liefert $(U_g/H)_{g\in G}$ eine offene Überdeckung von G/H. Die Karten $\varphi_g : U_g/H \to D_\epsilon$ sind gegeben durch

$$\varphi_g^{-1} : D_\epsilon = D_\epsilon \times e \subset D_\epsilon \times H \xrightarrow{\mu} D_\epsilon H \xrightarrow{L_g} gD_\epsilon H = U_g \xrightarrow{\pi} U_g/H.$$

Sei $U_{\overline{g}} = \overline{g}D_\epsilon H$, dann ist der Kartenwechsel

$$\varphi_{\overline{g}} \circ \varphi_g^{-1} : \varphi_g(U_{\overline{g}}/H \cap U_g/H) \to \varphi_{\overline{g}}(U_{\overline{g}}/H \cap U_g/H),\ d \mapsto \overline{g}^{-1}gd$$

differenzierbar [zur Beschreibung der Karten identifizieren wir D_ϵ mit $V_\epsilon \subset \mathbb{R}^m$ durch den Diffeomorhismus exp].

(4) π ist offensichtlich surjektiv. Weiterhin ist $\pi \circ L_g \circ \varphi_g : U_g/H \to U_g/H$ die Identität, d.h. $(d\pi)_g d(L_g \circ \varphi_g)_{gH} = \mathrm{Id}_{T_{gH}G/H}$ zeigt die Surjektivität von $(d\pi)_g$. Für eine Submersion $\pi : M \to N$ liefert jede Karte auf N eine Karte auf M, d.h. eine differenzierbare Struktur auf M legt die differenzierbare Struktur auf N eindeutig fest.

(5) Die Karten des Faserbündels $G \to G/H$ erhalten wir durch die Diffeomorphismen:

$$\psi_g^{-1} : U_g/H \times H \xrightarrow{\varphi_g \times \mathrm{id}} D_\epsilon \times H \xrightarrow{\mu} D_\epsilon \cdot H \xrightarrow{L_g} gD_\epsilon H = U_g.$$

Die zugehörigen Kartenwechsel sind differenzierbar, d.h. $H \hookrightarrow G \to G/H$ ist ein differenzierbares Faserbündel. □

Definition 2.1.2. Sei G eine Liegruppe und M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine *Liegruppenwirkung* von G auf M ist eine differenzierbare Gruppenwirkung $G \times M \to M$, $(g,p) \mapsto g \cdot p$, insbesondere definiert eine Liegruppenwirkung einen Homomorphismus $G \to \mathrm{Diffeo}(M)$. M heißt *G–homogener Raum*, wenn es eine transitive Liegruppenwirkung $G \times M \to M$ gibt, d.h. für alle $x, y \in M$ gibt es ein $g \in G$ mit $gx = y$.

Bemerkung 2.1.3.

a) Sei $H \subseteq G$ eine Lieuntergruppe, dann ist G/H ein G–homogener Raum bzgl. der Liegruppenwirkung $G \times G/H \to G/H$, $(g', gH) \mapsto (g'g)H$.

b) Sei $H \subseteq G$ eine normale Lieuntergruppe, dann ist G/H eine Liegruppe und $G \to G/H$ ist ein Homomorphismus von Liegruppen.

c) Sei $\rho : G \to \mathrm{Diffeo}(M)$ eine Liegruppenwirkung, dann ist $\ker \rho$ eine normale Lieuntergruppe von G. Der Quotient $G/\ker \rho$ ist eine Liegruppe, die differenzierbar und effektiv auf M wirkt. Ohne Einschränkung reicht es damit aus, effektive Liegruppenwirkungen zu betrachten.

Theorem 2.1.4. *Sei M ein G–homogener Raum, $p \in M$ beliebig und $H = G_p = \{g \in G|\ gp = p\}$ die Isotropiegruppe von p. Dann ist die Abbildung*

$$f : G/H \to M,\ gH \mapsto g \cdot p$$

ein wohldefinierter Diffeomorphismus und G–verträglich: $f(\tilde{g} \cdot gH) = \tilde{g}f(gH)$ für alle $\tilde{g} \in G$ und $gH \in G/H$.

Beweis. f ist wohldefiniert, denn für $gH = g'H$ gilt $g = g'h$ für ein $h \in H$ und damit $gp = (g'h)p = g'(hp) = g'p$. f ist injektiv: Dazu sei $f(gH) = f(g'H)$, dann folgt $gp = g'p$, d.h. $g^{-1}g' \in H$ liefert $g'H = gH$ in G/H. f ist surjektiv: Sei $x \in M$, dann existiert ein $g \in G$ mit $x = gp$ (transitive Wirkung), also $x = f(gH)$. f ist G–verträglich, denn

$$\tilde{g} \cdot f(gH) = \tilde{g}(gp) = (\tilde{g}g)p = f((\tilde{g}g)H) = f(\tilde{g} \cdot gH).$$

Noch zu zeigen: f und f^{-1} sind differenzierbar. Dazu betrachten wir die differenzierbaren Abbildung $\alpha : G \to M$, $g \mapsto g \cdot p$ und $\pi : G \to G/H$, $g \mapsto gH$. Es gilt $f \circ \pi = \alpha$, und da π eine Submersion ist, erhalten wir die Differenzierbarkeit von f: $df_{\pi(g)} \circ d\pi_g = d\alpha_g$ für alle $g \in G$ liefert eine eindeutige lineare Abbildung $df_{\pi(g)} : T_{gH}G/H \to T_{gp}M$. Analog folgt aus $\pi = f^{-1} \circ \alpha$ die Differenzierbarkeit von f^{-1}, wenn α eine Submersion ist. α ist surjektiv und nach Sard's Theorem ist die Menge der regulären Werte von α in M offen und dicht. Somit gibt es einen regulären Wert $x = gp \in M$ und $d\alpha_h : T_hG \to T_{hp}M$ ist surjektiv für alle $h \in \alpha^{-1}(x) = gH$. Die Linksmultiplikation $L_g^M : M \to M$, $y \mapsto gy$ ist aber ein Diffeomorphismus mit $dL_g^M \circ d\alpha_h = d\alpha_{gh} : T_{gh}G \to T_{ghp}M$, und da G transitiv auf sich selbst wirkt, folgt die Surjektivität von $d\alpha_g : T_gG \to T_{gp}M$ für alle $g \in G$. □

Bemerkung 2.1.5. Sei $y = g \cdot x$ für $x, y \in M$ und $g \in G$, dann gilt für die Isotropiegruppen von x bzw. y: $G_x = g^{-1}G_yg$. Damit sind für Lieuntergruppen $H, H' \subseteq G$ die Quotienten G/H und G/H' genau dann diffeomorph, wenn $H = gH'g^{-1}$ für ein $g \in G$ gilt.

2.2 Beispiele von homogenen Räumen

(i) Liegruppen sind homogen

Also sind insbesondere die obigen Beispiele homogene Räume: S^0, S^1, $S^3 = \mathrm{SU}(2) = \mathrm{Sp}(1)$, Matrixliegruppen,...

(ii) Sphären sind homogen

Die folgenden Beispiele zeigen, dass eine differenzierbare Mannigfaltigkeit verschiedene homogene Strukturen tragen kann. Wir werden später sehen, dass sich auch die von den Liegruppen induzierten Geometrien unterscheiden.

a) Die Wirkung $\mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(A, v) \mapsto Av$ ist differenzierbar, da dies die Einschränkung einer differenzierbaren Abbildung im Sinne der Analysis II ist. $\mathrm{SO}(n+1)$ wirkt damit transitiv und differenzierbar auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $p = (1, 0 \dots, 0) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, dann ist die Isotropiegruppe von p gegeben durch

$$\mathrm{SO}(n) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{SO}(n) \right\} \subset \mathrm{SO}(n+1).$$

Damit erhalten wir $S^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$.

b) Sei $S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z|^2 = 1\}$, dann wirkt $\mathrm{U}(n)$ transitiv und differenzierbar auf $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$. Die Isotropiegruppe von $p = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ ist

$$\mathrm{U}(n-1) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{U}(n-1) \right\} \subset \mathrm{U}(n),$$

d.h. $S^{2n-1} = \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-1)$. Analog definiert $\mathrm{SU}(n) \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$, $(A, z) \mapsto Az$ eine transitive Liegruppenwirkung mit $\mathrm{SU}(n)_p \cong \mathrm{SU}(n-1)$, also $S^{2n-1} = \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1)$.

c) Sei $S^{4n-1} = \{q \in \mathbb{H}^n \mid |q|^2 = 1\}$, dann ist $\mathrm{Sp}(n) \times S^{4n-1} \to S^{4n-1}$, $(A, q) \mapsto A \cdot q$ eine transitive Liegruppenwirkung, und die Isotropiegruppe des Punktes $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{H}^n$ ist

$$\mathrm{Sp}(n-1) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{Sp}(n-1) \right\} \subset \mathrm{Sp}(n).$$

Folglich gilt $S^{4n-1} = \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{Sp}(n-1)$

(iii) Reell Projektive Raum

Der reell projektive Raum wird durch

$$\mathbb{R}P^n = \{\text{Geraden im } \mathbb{R}^{n+1} \text{ durch den Nullpunkt}\} = S^n/(x \sim -x)$$

gegeben. Da $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ eine differenzierbare Überlagerung ist, wirkt die spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(n+1)$ differenzierbar und transitiv auf dem $\mathbb{R}P^n$ durch

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{SO}(n+1) \times S^n & \longrightarrow & S^n, & & (A, x) \mapsto Ax \\ \downarrow \quad\quad \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \\ \mathrm{SO}(n+1) \times \mathbb{R}P^n & \longrightarrow & \mathbb{R}P^n, & & (A, [x]) \mapsto [Ax]. \end{array}$$

Die Isotropiegruppe des Punktes $p = [(1, 0, \dots, 0)] = [(-1, 0, \dots, 0)]$ ist:

$$\mathrm{O}(n) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{O}(n), \det A = \sigma \in \{\pm 1\} \right\} \subset \mathrm{SO}(n+1).$$

Also folgt $\mathbb{R}P^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{O}(n)$. Für ungerades n operiert $\mathrm{SO}(n+1)$ nicht effektiv auf $\mathbb{R}P^n$, sondern nur fast effektiv, da $-\mathrm{Id} \in \mathrm{SO}(n+1)$ wie die Identität auf dem $\mathbb{R}P^n$ wirkt.

Übung 2.2.1. $\mathbb{R}P^3$ ist diffeomorph zu $\mathrm{SO}(3)$.

(iv) Reelle Grassmann Mannigfaltigkeiten

Sei $0 < k < n$ und

$$G_k(\mathbb{R}^n) = \{V \text{ ist k-dimensionaler Unterraum im } \mathbb{R}^n\}$$
$$G_k^0(\mathbb{R}^n) = \{V \text{ ist k-dimensionaler orientierter Unterraum im } \mathbb{R}^n\}.$$

Die Abbildung $G_k^0(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$, $V_{orient} \mapsto V$ ist eine 2–fache Überlagerung, da V_{orient} und $-V_{orient}$ auf V abgebildet werden. $\mathrm{SO}(n)$ wirkt transitiv auf $G_k(\mathbb{R}^n)$ und $G_k^0(\mathbb{R}^n)$ durch Matrixmultiplikation der Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Sei $e_i \in \mathbb{R}^n$ der i–te Einheitsvektor und $V_0 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, \dots, e_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, dann ist die Isotropiegruppe von V_0 im Fall $G_k(\mathbb{R}^n)$ gegeben durch:

$$\mathrm{S}(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} A \in \mathrm{O}(k), B \in \mathrm{O}(n-k) \\ \det A \cdot \det B = 1 \end{array} \right\}.$$

Im Fall $G_k^0(\mathbb{R}^n)$ ist die Isotropiegruppe von V_0:

$$\mathrm{SO}(k) \times \mathrm{SO}(n-k) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| A \in \mathrm{SO}(k), B \in \mathrm{SO}(n-k) \right\}.$$

Damit lassen sich die reellen Grassmann Räume schreiben als

$$G_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{S}(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k))$$
$$G_k^0(\mathbb{R}^n) = \mathrm{SO}(n)/\big(\mathrm{SO}(k) \times \mathrm{SO}(n-k)\big).$$

Wir versehen $G_k(\mathbb{R}^n)$ und $G_k^0(\mathbb{R}^n)$ mit der differenzierbaren Struktur als homogener Raum (Theorem 2.1.1) und erhalten damit die Grassmann–Mannigfaltigkeiten. Als Spezialfälle erhalten wir $G_1^0(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$ und $G_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}P^{n-1}$. Die Schreibweise der Grassmannschen als homogener Raum zeigt die Symmetrie: $G_k(\mathbb{R}^n) = G_{n-k}(\mathbb{R}^n)$ sowie $G_k^0(\mathbb{R}^n) = G_{n-k}^0(\mathbb{R}^n)$.

(v) Komplexe Grassmann Mannigfaltigkeiten

$$G_k(\mathbb{C}^n) := \{\text{komplexe k–dimensionale Unterräume im } \mathbb{C}^n\}$$

wobei $0 < k < n$. $\mathrm{U}(n)$ und $\mathrm{SU}(n)$ wirken transitiv auf $G_k(\mathbb{C}^n)$ und die Isotropiegruppen von $V_0 = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_1, \dots, e_k\}$ sind

$$\mathrm{U}(k) \times \mathrm{U}(n-k) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| A \in \mathrm{U}(k), B \in \mathrm{U}(n-k) \right\} \subseteq \mathrm{U}(n)$$

sowie

$$\mathrm{S}(\mathrm{U}(k)\times\mathrm{U}(n-k)) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} A\in \mathrm{U}(k), B\in\mathrm{U}(n-k) \\ \det A\cdot\det B = 1 \end{matrix} \right\} \subseteq \mathrm{SU}(n).$$

Dies liefert

$$G_k(\mathbb{C}^n) = \mathrm{U}(n)/\big(\mathrm{U}(k)\times\mathrm{U}(n-k)\big) = \mathrm{SU}(n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(k)\times\mathrm{U}(n-k)).$$

Damit folgt die Symmetrie $G_k(\mathbb{C}^n) = G_{n-k}(\mathbb{C}^n)$, und wir erhalten als Spezialfall $G_1(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}P^{n-1}$ sowie $G_1(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}P^1 = S^2$. Analog zum reell projektiven Raum kann man zeigen, dass die gewöhnliche Mannigfaltigkeitsstruktur des $\mathbb{C}P^n$ mit der Struktur als homogener Raum übereinstimmt, d.h. $\mathbb{C}P^n$ ist diffeomorph zu

$$\mathrm{U}(n+1)/\big(\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(n)\big) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{U}(n)$$

wobei im 2-ten Fall $\mathrm{U}(n) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right) | A\in\mathrm{U}(n), z\det(A) = 1 \right\} \subset \mathrm{SU}(n+1)$.

(vi) Quaternionische Grassmann Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten den $\mathbb{H}^n$ als Rechtsvektorraum damit $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$ von links operiert und diese Wirkungen kommutieren. Dann ist für $0<k<n$

$$G_k(\mathbb{H}^n) = \{k - \text{dimensionale } \mathbb{H}\text{-Rechtsunterräume im } \mathbb{H}^n\}$$

ein $\mathrm{Sp}(n)$–homogener Raum. $\mathrm{Sp}(n)$ wirkt transitiv auf $G_k(\mathbb{H}^n)$ und die Isotropiegruppe von

$$V_0 = \{e_1q_1 + \cdots + e_kq_k |\; q_i \in \mathbb{H}\}, \qquad e_i\in\mathbb{H}^n \;\; i-\text{te Einheitsvektor}$$

wird gegeben durch

$$\mathrm{Sp}(k)\times\mathrm{Sp}(n-k) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \;\middle|\; A\in\mathrm{Sp}(k), B\in\mathrm{Sp}(n-k) \right\} \subseteq \mathrm{Sp}(n).$$

Damit folgt: $G_k(\mathbb{H}^n) = \mathrm{Sp}(n)/\big(\mathrm{Sp}(k)\times\mathrm{Sp}(n-k)\big)$ als homogener Raum. Insbesondere gilt $G_1(\mathbb{H}^n) = \mathbb{H}P^{n-1}$ und $G_1(\mathbb{H}^2) = S^4$, denn $\mathrm{Sp}(2) = \mathrm{Spin}(5)$, $\mathrm{Sp}(1) = \mathrm{Spin}(3)$ und $S^4 = \mathrm{Spin}(5)/\mathrm{Spin}(4)$ sowie $\mathrm{Spin}(4) = \mathrm{Spin}(3)\times\mathrm{Spin}(3)$.

(vii) Stiefel–Mannigfaltigkeiten

Sei $\langle .,. \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ mit $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}\}$ wobei $\langle q,w\rangle := \sum \overline{q_i}w_i$ für Vektoren $q,w\in\mathbb{H}^n$. Wir definieren

$$V_k(\mathbb{K}^n) = \{(v_1,\dots,v_k)|\; v_i\in\mathbb{K}^n, \langle v_i,v_j\rangle = \delta_{ij}\}$$

und betrachten den Punkt $p = (e_1,\dots,e_k)\in V_k(\mathbb{K}^n)$ für die i–ten Einheitsvektoren $e_i\in\mathbb{K}^n$. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $A\in\mathrm{SO}(n)$, dann liefert $A(v_1,\dots,v_k) :=$

$(Av_1, \ldots, Av_k)$ eine transitive Gruppenwirkung auf $V_k(\mathbb{R}^n)$ und die Isotropiegruppe von p wird gegeben durch

$$\mathrm{SO}(n-k) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \Big| A \in \mathrm{SO}(n-k) \right\} \subseteq \mathrm{SO}(n).$$

Analog wirkt $\mathrm{O}(n)$ transitiv auf $V_k(\mathbb{R}^n)$ mit Isotropiegruppe $\mathrm{O}(n-k)$, d.h. wir erhalten

$$V_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-k) = \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-k).$$

Im Komplexen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wirken $\mathrm{U}(n)$ bzw. $\mathrm{SU}(n)$ transitiv auf $V_k(\mathbb{C}^n)$ mit Isotropiegruppen $\mathrm{U}(n-k)$ bzw. $\mathrm{SU}(n-k)$, d.h.

$$V_k(\mathbb{C}^n) = \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-k) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-k).$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ folgt analog $V_k(\mathbb{H}^n) = \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{Sp}(n-k)$.

Die Abbildung

$$V_k(\mathbb{K}^n) \to G_k(\mathbb{K}^n),\ (v_1, \ldots, v_k) \mapsto \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_k\}$$

definiert ein Faserbündel mit Faser $\mathrm{O}(k)$, $\mathrm{U}(k)$ bzw. $\mathrm{Sp}(k)$.

(viii) Fahnen–Mannigfaltigkeiten

Sei $0 < n_1 < \cdots < n_k < n$ und $\overline{n} = (n_1, \ldots, n_k)$ sowie $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, dann bezeichnet man

$$F_{\overline{n}}(\mathbb{K}^n) = \{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_k \subset \mathbb{K}^n |\ V_i \text{ Unterraum mit } \dim V_i = n_i\}$$

als Fahnen–Mannigfaltigkeit. Sei $\tilde{V}_i := \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{e_1, \ldots, e_{n_i}\}$ mit $e_i \in \mathbb{K}^n$ i–te Einheitsvektor, und betrachte die Fahne $\tilde{V}_1 \subset \cdots \subset \tilde{V}_k$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wirkt $\mathrm{O}(n)$ transitiv auf $F_{\overline{n}}(\mathbb{R}^n)$ durch die Standardwirkung auf dem $\mathbb{R}^n$, und die Isotropiegruppe der Fahne $\tilde{V}_1 \subset \cdots \subset \tilde{V}_k$ ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} A_1 \in \mathrm{O}(n_1), A_2 \in \mathrm{O}(n_2 - n_1), \\ A_j \in \mathrm{O}(n_j - n_{j-1}), A_k \in \mathrm{O}(n - n_k) \end{array} \right\}$$

Analoges gilt im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, d.h. wir erhalten

$$\begin{aligned} F_{\overline{n}}(\mathbb{R}^n) &= \mathrm{O}(n)/\big(\mathrm{O}(n_1) \times \mathrm{O}(n_2 - n_1) \times \cdots \times \mathrm{O}(n - n_k)\big) \\ F_{\overline{n}}(\mathbb{C}^n) &= \mathrm{U}(n)/\big(\mathrm{U}(n_1) \times \mathrm{U}(n_2 - n_1) \times \cdots \times \mathrm{U}(n - n_k)\big) \\ F_{\overline{n}}(\mathbb{H}^n) &= \mathrm{Sp}(n)/\big(\mathrm{Sp}(n_1) \times \mathrm{Sp}(n_2 - n_1) \times \cdots \times \mathrm{Sp}(n - n_k)\big) \end{aligned}$$

Im reellen und komplexen Fall wirken natürlich auch $\mathrm{SO}(n)$ bzw. $\mathrm{SU}(n)$ transitiv auf den Fahnenmannigfaltigkeiten, damit erhählt man wie für die Grassmann–Mannigfaltigkeiten entsprechende Darstellungen der Fahnen–Mannigfaltigkeiten.

Bemerkung 2.2.2. Die Beispiele (ii)–(viii) sind alle kompakt durch folgendes Argument: Ist G eine kompakte Liegruppe und $H \subseteq G$ eine Lieuntergruppe, dann ist $G \to G/H$ insbesondere stetig und surjektiv, d.h. die Kompaktheit von G/H folgt aus der Tatsache, dass das Bild einer kompakte Menge unter einer stetigen Abbildung kompakt ist.

(ix) $\mathbb{R}^n$ als isotropie–irreduzibler Raum

Den Begriff isotropie–irreduzibel definieren wir später. Wir betrachten die Euklidische Gruppe $G = \mathrm{O}(n) \rtimes \mathbb{R}^n$, d.h. G ist $\mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^n$ als Menge mit der Multiplikation $(A, v) \cdot (B, w) := (AB, v + Aw)$. Die Euklidische Bewegung

$$G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ \big((A, v), x\big) \mapsto Ax + v$$

ist eine transitive Gruppenwirkung auf dem $\mathbb{R}^n$. Die Isotropiegruppe des Punktes $x = 0$ ist $\mathrm{O}(n) \subset G$, d.h. es gilt $\mathbb{R}^n = \mathrm{O}(n) \rtimes \mathbb{R}^n/\mathrm{O}(n)$ als homogener Raum. Die Isotropiedarstellung für dieses Beispiel ist die Standarddarstellung $\mathrm{O}(n) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, also insbesondere irreduzibel.

(x) Riemannsch homogene Räume

Theorem 2.2.3 (Myers–Steenrod)**.** *Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann trägt die Isometriegruppe*

$$\mathrm{Isom}(M, g) = \{f : M \to M \ \ \textit{glatt mit } f^*g = g\}$$

genau eine Struktur als Mannigfaltigkeit, so dass

1. $\mathrm{Isom}(M, g)$ *eine Liegruppe bzgl. Komposition von Abbildungen ist.*
2. $\mathrm{Isom}(M, g) \times M \to M$, $(f, x) \mapsto f(x)$ *eine Liegruppenwirkung ist.*

In diesem Fall gilt $\dim \mathrm{Isom}(M, g) \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

Definition 2.2.4. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *Riemannsch homogen*, wenn die Isometriegruppe transitiv auf M wirkt.

Beispiel 2.2.5. *Sei $(S^n, g_0) \subset (\mathbb{R}^{n+1}, g_{Euk})$ die Standardsphäre, dann gilt* $\mathrm{Isom}(S^n, g_0) \cong \mathrm{O}(n + 1)$ *durch folgendes Argument: Konstantes reskalieren von $(S^n, g_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ liefert für jedes $f \in \mathrm{Isom}(S^n, g_0)$ eine Abbildung $A : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit $g_{Euk}(Ax, Ay) = g_{Euk}(x, y)$. Also setzt sich A zu einer orthogonalen linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ fort.* $\mathrm{O}(n+1)$ *operiert transitiv auf S^n mit Isotropiegruppe $\mathrm{O}(n) = \{f \in \mathrm{O}(n+1) | f(x_0) = x_0\}$, d.h. es gilt $S^n = \mathrm{O}(n + 1)/\mathrm{O}(n)$ als Riemannsch homogener Raum.*

Bemerkung 2.2.6. Sei $p \in M$ fest gewählt, dann wirkt die Isotropiegruppe $H = \{f \in \mathrm{Isom}(M, g) | f(p) = p\}$ auf T_pM durch das Differential

$$\chi : H \to \mathrm{GL}(T_pM), f \mapsto (df)_p.$$

χ heißt *lineare Isotropiedarstellung.* Für eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist χ injektiv und H kompakt (Übung).

2.3 Homotopiegruppen homogener Räume

Definition 2.3.1. 1. Seien X, B, F topologische Räume und $\pi : X \to B$ stetig. Dann heißt $\pi : X \to B$ ein *Faserbündel mit Faser* F, Totalraum X und Basis B, wenn π surjektiv ist und es für alle $b \in B$ eine offene Umgebung $U \subseteq B$ sowie einen Homöomorphismus $\varphi_U : U \times F \to \pi^{-1}(U) \subseteq X$ derart gibt, dass $\mathrm{pr}_U = \pi \circ \varphi_U$ gilt ($\mathrm{pr}_U : U \times F \to U$ meint die Projektion auf U).

2. $\pi : X \to B$ heißt *differenzierbares Faserbündel*, falls zusätzlich X, B, F differenzierbare Mannigfaltigkeiten und die Abbildungen π, φ_U, φ_U^{-1} differenzierbar sind. Ein Faserbündel kennzeichnen wir oft durch $F \hookrightarrow X \to B$.

3. Ein Faserbündel mit diskreter Faser F heißt *Überlagerung.*

4. Sei H eine Liegruppe, dann ist ein H*–Prinzipalbündel* (bzw. ein H–Hauptfaserbündel) ein differenzierbares Faserbündel $\pi : E \to M$ mit Faser H und einer freien transitiven Rechts–Liegruppenwirkung $E \times H \to E$, so dass $\pi(x \cdot h) = \pi(x)$ für alle $x \in E$, $h \in H$.

Beispiel 2.3.2. *Die Projektion $\pi : F \times B \to B$ ist offensichtlich ein Faserbündel mit Faser F. Sei $H \subseteq G$ eine Lieuntergruppe, dann ist $\pi : G \to G/H$ ein H–Prinzipalbündel (Übungsaufgabe).*

Grundsätzliche Idee. Zur Berechnung von Homotopie–und Kohomologiegruppen homogener Räume betrachten wir die Faserbündel

$$H \hookrightarrow G \to G/H, g \mapsto gH$$
$$H/K \hookrightarrow G/K \to G/H, gK \mapsto gH$$

mit $K \subseteq H \subseteq G$ Lieuntergruppen.

Beispiel 2.3.3 (Übungsaufgabe)**.** $\mathrm{SU}(n) \subset \mathrm{U}(n) \subset \mathrm{SU}(n+1)$ *definiert ein Faserbündel*

$$S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n,$$

welches als Hopf–Faserung bekannt ist. $\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{Sp}(n+1)$ *liefert ein Faserbündel*

$$S^3 \hookrightarrow S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n.$$

Definition 2.3.4. Stetige Abbildungen $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ [d.h. $f, g : X \to Y$ sind stetig mit $f(x_0) = g(x_0) = y_0$] heißen *homotop*: $f \simeq g$, wenn es eine stetige Abbildung $H : X \times [0, 1] \to Y$ mit $H(x_0, t) = y_0$ für alle $t \in [0, 1]$ und $H(., 0) = f$ sowie $H(., 1) = g$ gibt. Offensichtlich ist $\simeq$ eine Äquivalenzrelation. Die Homotopieklasse von f bezeichnen wir mit

$$[f] = \{g : (X, x_0) \to (Y, y_0) |\ f \simeq g\}$$

und die Menge der Homotopieklassen durch

$$[(X, x_0); (Y, y_0)] = \{[f] \mid f : (X, x_0) \to (Y, y_0)\}.$$

Definition+Satz 2.3.5 ([4, 9])**.** Sei $x_0 \in S^n$ ein fest gewählter Punkt, dann heißt

$$\pi_n(X,p) := [(S^n, x_0); (X,p)]$$

die Homotopiegruppe von X zum Basispunkt $p \in X$. $\pi_n(X,p)$ sind Gruppen für $n \geq 1$ und abelsch für $n \geq 2$. Für einen wegzusammenhängenden Raum X gilt $\pi_n(X,q) \cong \pi_n(X,p)$, in diesem Fall schreibt man abkürzend auch $\pi_n(X)$. $\pi_1(X,p)$ heißt *Fundamentalgruppe* von X zum Basispunkt p. $\pi_0(X,.)$ ist bijektiv zur Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X. Sei $f : X \to Y$ stetig, dann induziert f Homomorphismen $f_\# : \pi_n(X,p) \to \pi_n(Y, f(p))$, $[g] \mapsto [f \circ g]$. Für homotope Abbildungen $f, h : (X,p) \to (Y,q)$ folgt insbesondere $f_\# = h_\#$, d.h. $f \simeq$ const liefert $f_\# = 0$. Die Eigenschaft $(f \circ h)_\# = f_\# \circ h_\#$ zeigt, dass π_n einen Funktor auf der Kategorie der topologischen Räume mit Basispunkt definiert.

Bemerkung 2.3.6. Seien X und Y wegzusammenhängend und homöomorph (bzw. diffeomorph), dann gilt offensichtlich $\pi_n(X) \approx \pi_n(Y)$ für alle n.

Definition 2.3.7. Ein Raum X heißt *n–zusammenhängend*, wenn $\pi_k(X) = 0$ für alle $k \leq n$.

Satz 2.3.8 (Hurewicz [4, 9])**.** *Sei M^n eine m–zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit $m > 0$. Dann gilt für die singuläre Homologie $H_k(M) = \{0\}$ für alle $1 \leq k \leq m$ und*

$$\pi_{m+1}(M,p) \to H_{m+1}(M), \ [\varphi] \mapsto \varphi_*[S^{m+1}]$$

ist ein Isomorphismus, wobei $[S^{m+1}]$ ein Erzeuger von $H_{m+1}(S^{m+1})$ ist.

Bemerkung 2.3.9. Kennt man also die singuläre Homologie von S^n, folgt aus dem Satz von Hurewicz für $n \geq 2$: S^n ist $(n-1)$–zusammenhängend mit $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$. Die höheren Homotopiegruppen der Sphären zu bestimmen, ist im Allgemeinen ein nicht–triviales Problem. Offensichtlich gilt $\pi_0(S^0) = \mathbb{Z}_2$, $\pi_j(S^0,.) = \{0\}$ für $j > 0$. Die universelle Überlagerung von S^1 ist $\mathbb{R}$ was $\pi_j(S^1) = \{0\}$ für alle $j \geq 2$ zeigt. Weiterhin kann man $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ zeigen.

Satz 2.3.10 (Homotopiesequenz [4, 9])**.** *Sei $F \overset{i}{\hookrightarrow} E \overset{\pi}{\to} M$ ein Faserbündel, $p \in M$ und $e \in \pi^{-1}(p) = F$. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz:*

$$\longrightarrow \pi_n(F,e) \xrightarrow{i_\#} \pi_n(E,e) \xrightarrow{\pi_\#} \pi_n(M,p) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F,e) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow \pi_1(M,p) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F,e) \xrightarrow{i_\#} \pi_0(E,e) \xrightarrow{\pi_\#} \pi_0(M,p).$$

∂ heißt Randoperator. Obwohl π_0 im Allgemeinen keine Gruppen sind, ist die Sequenz am Ende wohldefiniert:

$$\ker i_\# = \{\alpha \in \pi_0(F,e) |\ i_\# \alpha \text{ ist homotop zur konstanten Abbildung}\}.$$

Korollar 2.3.11. *1. Sei $M = G/H$ zusammenhängend mit $\pi_1(M) = \{0\}$, dann gilt $\pi_0(G) \approx \pi_0(H)$.*

2. *Sei G eine zusammenhängende Liegruppe mit $\pi_1(G) = \{0\}$ und $H \subseteq G$ eine Lieuntergruppe, dann ist $M = G/H$ zusammenhängend mit $\pi_1(M) \approx \pi_0(H)$.*

Beweis. Wende die Homotopiesequenz auf das Faserbündel $H \hookrightarrow G \to G/H$ an. $\square$

Bemerkungen zu Überlagerungen

- Ein wegzusammenhängender Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn $\pi_1(X) = \{0\}$.

- Für einen hinreichend zusammenhängenden Raum X (z.B. eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit) gibt es einen einfach zusammenhängenden Raum $\tilde{X}$, der X überlagert, d.h. $p : \tilde{X} \to X$ ist eine Überlagerung. $\tilde{X}$ ist eindeutig bis auf Homöomorphie und heißt deshalb *universelle Überlagerung* von X. Die Faser von $\tilde{X} \to X$ ist homöomorph zu $\pi_1(X)$. Da die Faser F einer Überlagerung diskret ist, folgt aus $\pi_n(F, .) = \{0\}$ für alle $n \geq 1$ und der langen Homotopiesequenz für Faserbündel die Eigenschaft $\pi_n(\tilde{X}) = \pi_n(X)$ für alle $n \geq 2$.

- Ist X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, so hat die universelle Überlagerung $\tilde{X}$ die Struktur einer Mannigfaltigkeit, so dass $p : \tilde{X} \to X$ differenzierbar und ein lokaler Diffeomorphismus ist.

- Ist (X, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist $p : (\tilde{X}, p^*g) \to (X, g)$ eine Riemannsche Überlagerung, d.h. p ist eine lokale Isometrie.

- Sei X eine zusammenhängende Liegruppe, $p : \tilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung und $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$. Dann gibt es genau eine Liegruppenstruktur auf $\tilde{X}$, so dass $\tilde{e}$ die Eins in $\tilde{X}$ bezeichnet und $p : \tilde{X} \to X$ ein Liegruppenhomomorphismus ist.

- Sei $\Gamma \subset \mathrm{Diffeo}(X)$ eine Untergruppe, dann wirkt Γ *frei und eigentlich diskontinuierlich* auf X, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subset X$ besitzt, so dass $(gU) \cap U = \emptyset$ für alle $g \in \Gamma \setminus \{e\}$ gilt. In diesem Fall trägt X/Γ die Struktur einer Mannigfaltigkeit und $p : X \to X/\Gamma$ ist eine Überlagerung mit Faser Γ. Zum Beispiel: Sei $\Gamma \subset \mathrm{Diffeo}(X)$ eine endliche diskrete Gruppe, die frei auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit X operiert, dann ist X/Γ eine geschlossene Mannigfaltigkeit ($\mathbb{R}P^n = S^n/\mathbb{Z}_2$).

Übung 2.3.12. Sei (M, g) eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K_M \leq 0$, dann gilt $\pi_n(M) = 0$ für alle $n \neq 1$. Einen topologischen Raum mit dieser Eigenschaft nennt man *Eilenberg–MacLane Raum* vom Typ $K(\pi, 1)$, wobei π die Fundamentalgruppe bezeichnet und die Notation $K(\pi, 1)$ a–priori nichts mit der Schnittkrümmung zu tun hat.

Satz 2.3.13 (Liftungstheorem [4, 9]). *Seien $X, \bar{X}, Y$ Mannigfaltigkeiten, Y zusammenhängend und $p : \bar{X} \to X$ eine [differenzierbare] Überlagerung mit $p(\bar{x}_0) = x_0$. Sei $f : X \to Y$ stetig [differenzierbar] mit $f(y_0) = x_0$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gibt eine stetige [differenzierbare] Abbildung $\bar{f} : \bar{X} \to Y$ mit $\bar{f}(\bar{x}_0) = \bar{y}_0$ und $p \circ \bar{f} = f$.

(ii) $f_\#(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_\#(\pi_1(\bar{X}, \bar{x}_0))$.

Fundamentalgruppe von $\mathrm{SO}(n)$

Die Homotopiegruppen von $\mathrm{SO}(1) = \{e\}$ und $\mathrm{SO}(2) = S^1$ sind klar. Sei also $n \geq 3$ und betrachte den homogenen Raum $S^{n-1} = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1)$. Da S^{n-1} einfach zusammenhängend und $\mathrm{SO}(2) = S^1$ zusammenhängend ist, folgt induktiv: $\mathrm{SO}(n)$ ist zusammenhängend für alle n (Korollar 2.3.11). Weiterhin erhalten wir aus der langen Homotopiesequenz des Faserbündels $\mathrm{SO}(n-1) \hookrightarrow \mathrm{SO}(n) \to S^{n-1}$ die exakte Sequenz:

$$\to \pi_2(S^{n-1}) \to \pi_1(\mathrm{SO}(n-1)) \to \pi_1(\mathrm{SO}(n)) \to \pi_1(S^{n-1}) = \{0\}.$$

Aus $\pi_2(S^{n-1}) = \{0\}$ für $n > 3$ folgt

$$\pi_1(\mathrm{SO}(n-1)) = \pi_1(\mathrm{SO}(n))$$

für alle $n > 3$. Nach Übungsaufgabe gilt $\mathrm{SO}(3) = \mathbb{R}P^3 = S^3/\mathbb{Z}_2$, d.h. die obigen Bemerkungen liefern

$$\pi_1(\mathrm{SO}(n)) = \mathbb{Z}_2 \qquad \forall n \geq 3.$$

Definition 2.3.14. Die Liegruppen, die $\mathrm{SO}(n)$ universell überlagern für $n \geq 3$, heißen *Spingruppen*:

$$\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$$

ist eine 2–fache Überlagerung.

Fundamentalgruppe von $\mathrm{SU}(n)$ und $\mathrm{Sp}(n)$

Es gilt $\mathrm{SU}(1) = \{e\}$ und $\mathrm{SU}(2) = \mathrm{Sp}(1) = S^3$ nach Übungsaufgabe, d.h. diese Liegruppen sind einfach zusammenhängend. Sei also $n > 0$ und betrachte die homogenen Räume $S^{2n+1} = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n)$, $S^{4n+3} = \mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(1)$. Dann liefert die Homotopiesequenz der zugehörigen Faserbündel:

$$\begin{aligned} \to \{0\} = \pi_2(S^{2n+1}) \to & \pi_1(\mathrm{SU}(n)) \to \pi_1(\mathrm{SU})(n+1) \to \{0\} \\ & \{0\} = \pi_1(S^{2n+1}) \to \pi_0(\mathrm{SU}(n)) \to \pi_0(\mathrm{SU}(n+1) \to 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \to \{0\} = \pi_2(S^{4n+3}) \to & \pi_1(\mathrm{Sp}(n)) \to \pi_1(\mathrm{Sp})(n+1) \to \{0\} \\ & \{0\} = \pi_1(S^{4n+3}) \to \pi_0(\mathrm{Sp}(n)) \to \pi_0(\mathrm{Sp}(n+1) \to 0. \end{aligned}$$

Induktiv folgt damit: $\mathrm{SU}(n)$ und $\mathrm{Sp}(n)$ sind einfach zusammenhängend.

Fundamentalgruppe der komplexen und quaternionischen Grassmann–Räume

$G_k(\mathbb{C}^n)$ und $G_k(\mathbb{H}^n)$ sind einfach zusammenhängend, da $\mathrm{SU}(n)$ bzw. $\mathrm{Sp}(n)$ zusammenhängend sind und die Homotopiesequenz exakte Sequenzen

$$\{0\} = \pi_1(\mathrm{SU}(n)) \to \pi_1(G_k(\mathbb{C}^n)) \to \pi_0(\mathrm{S}(\mathrm{U}(k) \times \mathrm{U}(n-k))) = \{0\}$$
$$\{0\} = \pi_1(\mathrm{Sp}(n)) \to \pi_1(G_k(\mathbb{H}^n)) \to \pi_0(\mathrm{Sp}(k) \times \mathrm{Sp}(n-k)) = \{0\}$$

liefert. Für die reellen Grassmann–Mannigfaltigkeiten betrachten wir zuerst:

Homotopiegruppen von Stiefel–Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten nur den reellen Fall, der komplexe und quaternionische Fall folgen analog (Übungsaufgabe). Sei $k < n$ und betrachte $\mathrm{SO}(n-k) \subseteq \mathrm{SO}(n-1)$, dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} V_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-k) &\to V_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1} = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \\ g \cdot \mathrm{SO}(n-k) &\mapsto g \cdot \mathrm{SO}(n-1) \end{aligned}$$

ein Faserbündel mit Faser $V_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathrm{SO}(n-1)/\mathrm{SO}(n-k)$. Die exakte Homotopiesequenz für Faserbündel liefert eine exakte Sequenz

$$\to \pi_{j+1}(S^{n-1}) \to \pi_j(V_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1})) \to \pi_j(V_k(\mathbb{R}^n)) \to \pi_j(S^{n-1}) \to,$$

d.h. $\pi_{j+1}(S^{n-1}) = \pi_j(S^{n-1}) = \{0\}$ für $j < n-2$ zeigt induktiv

$$\pi_j(V_k(\mathbb{R}^n)) \overset{j<n-2}{=} \pi_j(V_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1})) \overset{j<n-3}{=} \pi_j(V_{k-2}(\mathbb{R}^{n-2})) = \cdots$$
$$\cdots = \pi_j(V_2(\mathbb{R}^{n-k+2})) \overset{j<n-k}{=} \pi_j(V_1(\mathbb{R}^{n-k+1})).$$

Da $V_1(\mathbb{R}^{n-k+1}) = S^{n-k}$, folgt für alle $j < n-k$: $\pi_j(V_k(\mathbb{R}^n)) = \{0\}$, d.h. $V_k(\mathbb{R}^n)$ ist $n-k-1$ zusammenhängend. Analog erhält man $V_k(\mathbb{C}^n)$ ist $2n-2k$ zusammenhängend und $V_k(\mathbb{H}^n)$ ist $4n-4k+2$ zusammenhängend.

Fundamentalgruppe der reellen Grassmannschen

Das Faserbündel

$$\begin{aligned} V_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-k) &\to G_k^0(\mathbb{R}^n) = \mathrm{SO}(n)/\big(\mathrm{SO}(k) \times \mathrm{SO}(n-k)\big) \\ g \cdot \mathrm{SO}(n-k) &\mapsto g \cdot \mathrm{SO}(n-k) \end{aligned}$$

besitzt die Faser $\mathrm{SO}(k)$. Damit erhalten wir aus $\pi_1(V_k(\mathbb{R}^n)) = \{0\}$, $n \geq 3$, und $\pi_0(\mathrm{SO}(k)) = \{0\}$ den einfachen Zusammenhang von $G_k^0(\mathbb{R}^n)$ falls $n \geq 3$. Die 2–fache Überlagerung

$$G_k^0(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n), \ V_{orient} \mapsto V$$

zeigt $\pi_1(G_k(\mathbb{R}^n)) = \mathbb{Z}_2$ für $n \geq 3$. Im Fall $n = 2$ und $k = 1$ gilt natürlich $G_1^0(\mathbb{R}^2) \approx G_1(\mathbb{R}^2) \approx S^1$, d.h. die Fundamentalgruppe ist dann $\mathbb{Z}$.

Übung 2.3.15. Bestimmen Sie $\pi_j(\mathbb{C}P^n)$ für $j \leq 2n+1$ und zeigen Sie, dass $\mathbb{H}P^n$ 3–zusammenhängend ist.

Übung 2.3.16. Zeigen Sie $\pi_2(G) = \{0\}$ für die Standard Matrixliegruppen $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$. Es gilt $\pi_k(\mathrm{U}(n)) = \pi_k(\mathrm{SU}(n))$ für alle $k \neq 1$.

Übung 2.3.17. Es gibt eine Einbettung $\mathrm{U}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ als Liegruppe. Insbesondere ist $M := \mathrm{SO}(n)/\mathrm{U}(n)$ ein einfach zusammenhängender homogener Raum mit $\pi_2(M) = \mathbb{Z}$.

2.4 Kohomologie homogener Räume

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und M eine Mannigfaltigkeit, dann bezeichnet $H^*(M;R)$ die (singuläre, simpliziale, Cech, deRham, ...) Kohomologie von M mit Werten in R.

Theorem 2.4.1 (Serre Sequenz [6, 9])**.** *Sei $F \overset{i}{\hookrightarrow} E \overset{p}{\to} M$ ein differenzierbares Faserbündel mit M einfach zusammenhängend und F zusammenhängend. Wähle $k, l > 0$ derart, dass $H^i(F;R) = H^j(M;R) = \{0\}$ für alle $0 < i < k$ und $0 < j < l$. Dann ist die folgende Sequenz exakt:*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & H^1(E;R) \xrightarrow{i^*} H^1(F;R) \xrightarrow{\delta} H^2(F;R) \longrightarrow \\ & \cdots \longrightarrow H^{k+l-1}(M;R) \xrightarrow{p^*} H^{k+l-1}(E;R) \xrightarrow{i^*} H^{k+l-1}(F;R) \end{aligned}$$

Theorem 2.4.2 (Leray–Hirsch [4, 9])**.** *Sei $F \overset{i}{\hookrightarrow} E \overset{p}{\to} M$ ein differenzierbares Faserbündel, so dass*

(i) $H^j(F;R)$ ein endlich erzeugter freier R–Modul ist für alle j,

(ii) und es Klassen $c_j \in H^{k_j}(E;R)$ derart gibt, dass die $i^*(c_j)$ eine Basis von $H^*(F;R)$ bilden für jede Faser F.

Dann ist die Abbildung

$$H^*(M;R) \otimes_R H^*(F;R) \to H^*(E;R), \ \sum_{k,j} b_k \otimes i^*(c_j) \mapsto \sum_{k,j} p^*(b_k) \cup c_j$$

ein Isomorphismus von R–Moduln.

Definition 2.4.3. Seien $a_1, \ldots, a_k$ formale Variablen, dann ist die *äußere Algebra* $\Lambda_R[a_1, \ldots, a_k]$ mit Eins und ungeraden Erzeugern $a_1, \ldots, a_k$ defniert durch folgende Relationen:

$$a_i \cdot a_j = -a_j \cdot a_i \qquad \text{und} \qquad a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \neq 0.$$

Bemerkung 2.4.4. Betrachtet man den von $a_1, \ldots, a_k$ erzeugten freien R-Modul V, so ist

$$\Lambda_R[a_1, \ldots, a_k] = \mathrm{span}_R \left\{ 1, a_1, \ldots, \underbrace{a_{i_1} \cdots a_{i_m}}_{i_1 < i_2 < \cdots < i_m}, \ldots, a_1 \cdots a_k \right\} \cong \Lambda_R^* V$$

ein freier R–Modul mit $\mathrm{rk}(\Lambda_R[a_1,\ldots,a_k]) = 2^k$. Die Schreibweise $\Lambda_R[a_1,\ldots,a_k]$ benutzt man, um den Erzeugern $a_1,\ldots,a_k$ einen bestimmten ungeraden Grad zuzuordenen, in der Notation $\Lambda_R^* V$ besitzt jedes a_j den Grad 1. Weiterhin gilt

$$\Lambda_R[a_1,\ldots,a_k]\hat{\otimes}_R\Lambda[a_{k+1}] \cong \Lambda_R[a_1,\ldots,a_k]$$

als R–Algebren, wobei $\hat{\otimes}_R$ das graduierte Tensorprodukt bezeichnet, d.h. $\otimes_R$ ist das Tensorprodukt von R–Moduln und die Multiplikation ist:

$$(a\hat{\otimes}b)\cdot(\bar{a}\hat{\otimes}\bar{b}) = (-1)^{|\bar{a}|\cdot|b|}(a\bar{a})\hat{\otimes}(b\hat{b})$$

mit $|\hat{a}| \in \{0,1\}$ der $\mathbb{Z}_2$–Grad von $\bar{a}$ ($|a_i| = 1$, $|a_i a_j| = 0$,...).

Satz 2.4.5. *Es gibt R–Algebra Isomorphismen*

$$\begin{aligned} H^*(\mathrm{U}(n);R) &\cong \Lambda_R[x_1,x_3,x_5,\ldots,x_{2n-1}]\\ H^*(\mathrm{SU}(n);R) &\cong \Lambda_R[x_3,x_5,x_7,\ldots,x_{2n-1}]\\ H^*(\mathrm{Sp}(n);R) &\cong \Lambda_R[x_3,x_7,x_{11},\ldots,x_{4n-1}]. \end{aligned}$$

Unter dem Isomorphismus gilt $x_i \in H^i(\ .\ ;R)$.

Beweis. Wir beweisen dies durch Induktion über n. Es gilt offensichtlich der Induktionsanfang

$$H^*(\mathrm{U}(1);R) = H^*(S^1;R) = R \oplus R\cdot x_1 = \Lambda_R[x_1].$$

Sei also $H^*(\mathrm{U}(n-1);R) = \Lambda_R[x_1,x_3,\ldots,x_{2n-3}]$ vorausgesetzt. Wir betrachten das Faserbündel $\mathrm{U}(n-1) \hookrightarrow \mathrm{U}(n) \xrightarrow{p} \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-1) = S^{2n-1}$, dann liefert die zugehörige Serre Sequenz [$H^j(S^{2n-1};R) = \{0\}$ für $0 < j < 2n-2$] Isomorphismen

$$i^* : H^k(\mathrm{U}(n);R) \to H^k(\mathrm{U}(n-1);R)$$

für alle $k \leq 2n-3$. Nach Voraussetzung ist $H^*(\mathrm{U}(n-1);R)$ ein freier Modul, d.h. es gibt Klassen $c_1,\ldots,c_{2n-3}$ mit $x_j = i^*c_j$, und die $i^*(c_{j_1}\cdots c_{j_s})$ liefern eine Basis von $H^*(\mathrm{U}(n-1);R)$. Damit können wir Leray–Hirsch anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} H^*(\mathrm{U}(n);R) &\cong H^*(\mathrm{U}(n-1);R)\otimes_R H^*(S^{2n-1};R)\\ &= \Lambda_R[x_1,\ldots,x_{2n-3}]\otimes\big(R\oplus R\cdot[S^{2n-1}]\big) \end{aligned}$$

als R–Moduln. Cup Produkte von ungeraden Klassen in $H^*(\mathrm{U}(n);R)$ antikommutieren aber, und es gilt $H^{n^2}(\mathrm{U}(n);R) \neq 0$, d.h. $x_1\cdots x_{2n-3}\cdot p^*([S^{2n-1}]) \neq 0$. Damit erhalten wir $H^*(\mathrm{U}(n);R) \cong \Lambda_R[x_1,\ldots,x_{2n-1}]$ als R–Algebra, wobei x_{2n-1} dem Element $p^*([S^{2n-1}])$ entspricht.

Analog folgt die Behauptung für $\mathrm{SU}(n)$ und $\mathrm{Sp}(n)$ aus den Faserbündeln $\mathrm{SU}(n-1) \hookrightarrow \mathrm{SU}(n) \to S^{2n-1}$ sowie $\mathrm{Sp}(n-1) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(n) \to S^{4n-1}$. Für $\mathrm{SU}(n)$ beginnt die Induktion bei $n = 2$: $H^*(\mathrm{SU}(n);R) = H^*(S^3;R) = \Lambda_R[x_3]$. Den Induktionsanfang für $\mathrm{Sp}(n)$ liefert $\mathrm{Sp}(1) = S^3$. Die gleichen Argumente wie oben zeigen $H^*(\mathrm{Sp}(n);R) = \Lambda_R[x_3,\ldots,x_{4n-1}]$ mit $x_{4n-1} = p^*[S^{4n-1}]$. $\square$

Bemerkung 2.4.6. Die Kohomologie von $\mathrm{SO}(n)$ ist komplizierter. Einer der Gründe ist, dass man in der Serre Sequenz des Faserbündels $\mathrm{SO}(n-1) \hookrightarrow \mathrm{SO}(n) \to S^{n-1}$ "nicht weit genug kommt":

$$H^i(\mathrm{SO}(n-1);\mathbb{Z}) \cong H^i(\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z}) \quad \text{nur für} \quad i \leq n-3$$

(der Isomorphismus gilt nicht für $n = 3$ und $i = 1$). Um $H^*(\mathrm{SO}(n);\mathbb{R})$ zu berechnen, bestimmt man zuerst die Kohomologie der Stiefel–Mannigfaltigkeiten und erhält dann

$$H^*(\mathrm{SO}(n);\mathbb{R}) = \begin{cases} \Lambda_{\mathbb{R}}[x_3, x_7, \dots, x_{2n-3}] & n \text{ ungerade} \\ \Lambda_{\mathbb{R}}[x_3, x_7, \dots, x_{2n-5}, x_{n-1}] & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Für $n \geq 3$ besitzt $H^*(\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z})$ außerdem Torsionsklassen, d.h. $H^*(\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z})$ ist kein freier $\mathbb{Z}$–Modul: $\mathbb{Z}_2 = \pi_1(\mathrm{SO}(n)) = H_1(\mathrm{SO}(n))$ und die Kohomologie für $\mathbb{R}$–Koeffizienten liefern $H^2(\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ für alle $n \geq 3$.

Theorem 2.4.7 (Gysin Sequence [4, 9])**.** *Sei $S^k \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ ein differenzierbares Faserbündel (Sphärenbündel) mit $k > 0$ und M einfach zusammenhängend. Dann gibt es ein Element $e \in H^{k+1}(M;R)$, so dass die Sequenz*

$$\cdots \to H^j(E;R) \xrightarrow{p_!} H^{j-k}(M;R) \xrightarrow{e\cup} H^{j+1}(M;R) \xrightarrow{p^*} H^{j+1}(E;R) \to \cdots$$

exakt ist. e heißt die Eulerklasse des Sphärenbündels. p^* ist der gewöhnliche Pullback, und $p_!$ ist die Integration über die Faser.

Satz 2.4.8. *a) $H^*(\mathbb{C}P^n;R) = R[c]/\left\langle c^{n+1}\right\rangle = \mathrm{span}_R\{1, c, c^2, \dots, c^n\}$ mit Erzeuger $c \in H^2(\mathbb{C}P^n;R)$.*

b) $H^*(\mathbb{H}P^n;R) = R[a]/\left\langle a^{n+1}\right\rangle$ mit Erzeuger $a \in H^4(\mathbb{H}P^n;R)$.

Beweis. Für a) wenden wir die Gysin Sequenz auf das Sphärenbündel

$$S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$$

an. Sei $c \in H^2(\mathbb{C}P^n;R)$ die Eulerklasse dieses Sphärenbündels, dann folgt aus $H^j(S^{2n+1};R) = H^{j+1}(S^{2n+1};R) = \{0\}$ für alle $0 < j < 2n$, dass

$$c\cup : H^{j-1}(\mathbb{C}P^n;R) \to H^{j+1}(\mathbb{C}P^n;R)$$

ein Isomorphismus ist für alle $0 < j < 2n$. Da $\mathbb{C}P^n$ einfach zusammenhängend ist, gilt $H^0(\mathbb{C}P^n;R) = R$ und $H^1(\mathbb{C}P^n;R) = \{0\}$. Damit erhalten wir die Behauptung $H^{2k+1}(\mathbb{C}P^n;R) = \{0\}$ und $H^{2k}(\mathbb{C}P^n;R) = R\cdot c^k$ für $k \leq n$ (es gilt $H^{2k}(\mathbb{C}P^n;R) = \{0\}$ für $k > n$, da $\mathbb{C}P^n$ eine $2n$–dimensionale Mannigfaltigkeit).

Für b) betrachten wir das Sphärenbündel

$$S^3 \hookrightarrow S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n$$

mit Eulerklasse $a \in H^4(\mathbb{H}P^n;R)$. Aus der Gysin Sequenz erhalten wir wieder Isomorphismen

$$a\cup : H^j(\mathbb{H}P^n;R) \to H^{j+4}(\mathbb{H}P^n;R)$$

für alle $0 \leq j \leq 4n-4$. Nach Übungsaufgabe ist $\mathbb{H}P^n$ 3–zusammenhängend, d.h. der Satz von Hurewicz und das universelle Koeffiziententheorem liefern $H^i(\mathbb{H}P^n;R) = \{0\}$ für $0 < i < 4$. Induktiv folgt also $H^j(\mathbb{H}P^n;R) = \{0\}$ für $j \not\equiv 0 \bmod 4$ und $H^{4k}(\mathbb{H}P^n;R) = R \cdot a^k$ für alle $0 \leq k \leq n$. □

Bemerkung 2.4.9. Die Situation des $\mathbb{R}P^n$ ist komplizierter, da $\mathbb{R}P^n$ nicht einfach zusammenhängend bzw. die Faser von $S^0 \hookrightarrow S^n \to \mathbb{R}P^n$ nicht zusammenhängend ist. Für den Ring $R = \mathbb{Z}_2$ erhält man aber ein analoges Resultat: $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[e]/\left\langle e^{n+1}\right\rangle$ mit $e \in H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$. Die deRham Kohomologie des $\mathbb{R}P^n$ ist gegeben durch

$$H^k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & 0 < k < n \text{ und } k = n \text{ gerade} \\ \mathbb{R} & k = n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Übung 2.4.10. Zeigen Sie mit Hilfe von Leray–Hirsch die Künneth Formel für Produkte:

$$H^*(M \times N;\mathbb{R}) \cong H^*(M;\mathbb{R}) \otimes H^*(N;\mathbb{R})$$

als $\mathbb{R}$–Algebra. Berechnen Sie damit $H^*(S^2 \times S^4;\mathbb{R})$ und zeigen Sie: $S^2 \times S^4 \not\approx \mathbb{C}P^3$. Konstruieren Sie ein Faserbündel $S^2 \to \mathbb{C}P^3 \to S^4$.

Übung 2.4.11. Bestimmen Sie die Kohomologie der komplexen und quaternionischen Stiefel–Mannigfaltigkeiten $[e_i \in H^i(V_k(\mathbb{K}^n);R)]$:

(i) $H^*(V_k(\mathbb{C}^n);R) = \Lambda_R[e_{2n-2k+1}, e_{2n-2k+3}, \ldots, e_{2n-1}]$.

(ii) $H^*(V_k(\mathbb{H}^n);R) = \Lambda_R[e_{4n-4k+3}, e_{4n-4k+7}, \ldots, e_{4n-4k-1}]$.

Kapitel 3

Geometrie homogener Räume

3.1 Invariante Metriken und invariante Integration auf Liegruppen

Definition 3.1.1. Eine Riemannsche Metrik $\langle .,. \rangle_G$ auf einer Liegruppe G heißt

(i) *linksinvariant*, wenn $L_h : G \to G$ eine Isometrie ist für alle $h \in G$, d.h.

$$\langle (L_h)_*(v), (L_h)_*(w) \rangle_G = \langle v, w \rangle_G \qquad \forall v, w \in TG.$$

(ii) *rechtsinvariant*, wenn $R_h : G \to G$ eine Isometrie ist für alle $h \in G$.

(iii) *biinvariant*, wenn L_h und R_h Isometrien sind für alle $h \in G$.

Satz 3.1.2. *Die Abbildung*

$$\{\textit{linksinvariante Metriken auf } G\} \to \{\textit{Skalarprodukte auf } T_eG\}$$
$$\langle .,. \rangle \mapsto \langle .,. \rangle_{|T_eG}$$

ist eine Bijektion.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 3.1.3. Sei V ein Vektorraum und $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine Darstellung von G auf V. Ein inneres Produkt $\langle .,. \rangle$ auf V heißt *G–invariant bzw. ρ–invariant*, wenn

$$\langle g \cdot v, g \cdot w \rangle = \langle \rho(g)(v), \rho(g)(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

für alle $g \in G$ und $v, w \in V$ gilt.

Satz 3.1.4. *Sei* $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *die adjungierte Darstellung einer Liegruppe auf ihrer Liealgebra* $\mathfrak{g}$. *Dann ist*

$$\{\textit{biinvariante Metriken auf } G\} \to \{\mathrm{Ad} - \textit{invariante Skalarprodukte auf } T_eG\}$$
$$\langle .,. \rangle \mapsto \langle .,. \rangle_{|T_eG}$$

eine Bijektion. Für jedes Ad*–invariante Skalarprodukt* $\langle .,. \rangle$ *auf* $T_eG \cong \mathfrak{g}$ *gilt*

$$\langle -\mathrm{ad}_Y X, Z\rangle = \langle [X,Y], Z\rangle = \langle X, [Y,Z]\rangle = \langle X, \mathrm{ad}_Y Z\rangle$$

für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. *Die Umkehrung dieser Aussage ist richtig, wenn* G *zusammenhängend ist. Das heißt, für eine zusammenhängende Liegruppe* G *ist ein Skalarprodukt auf* $\mathfrak{g} \cong T_eG$ *genau dann* Ad*–invariant, wenn* $\mathrm{ad}_Y \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ *schiefsymmetrisch ist für alle* $Y \in \mathfrak{g}$.

Beweis. Die adjungierte Darstellung ist gegeben durch $\mathrm{Ad}(g) = d(R_{g^{-1}} \circ L_g)_e = d(R_{g^{-1}})_g \circ d(L_g)_e$, d.h. für ein linksinvariantes Vektorfeld X gilt $\mathrm{Ad}(g)(X) = dR_{g^{-1}}(X)$ für alle $g \in G$. Sei $\langle .,. \rangle$ eine linksinvariante Metrik auf G, dann gilt $\langle X, Y\rangle = \mathrm{const}$ für linksinvariante Vektorfelder X, Y auf G. Weiterhin ist $\langle .,. \rangle$ genau dann biinvariant, wenn es rechtsinvariant ist, d.h.

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Ad}(g)(X), \mathrm{Ad}(g)(Y)\rangle_{|T_eG} &= \langle \mathrm{Ad}(g)(X), \mathrm{Ad}(g)(Y)\rangle \\ &= \left\langle dR_{g^{-1}}X, dR_{g^{-1}}Y\right\rangle = \langle X, Y\rangle = \langle X, Y\rangle_{|T_eG}\end{aligned}$$

zeigt die erste Behauptung (vgl. auch Satz 3.1.2). Für die zweite Behauptung benutzen wir

$$[X,Y] = -\mathrm{ad}_Y X = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big(\mathrm{Ad}(\exp(tY))\big)(X).$$

Sei also $\langle .,. \rangle$ ein Ad–invariantes Skalarprodukt auf T_eG, dann gilt

$$\begin{aligned}\langle [X,Y], Z\rangle &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle \mathrm{Ad}(\exp(tY))(X), Z\rangle \\ &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left\langle X, \mathrm{Ad}(\exp(tY))^{-1}(Z)\right\rangle \\ &= \left\langle X, -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}(\exp(-tY))(Z)\right\rangle = \langle X, [Y,Z]\rangle .\end{aligned}$$

Umgekehrt, sei ad_Y schiefsymmetrisch für alle $Y \in \mathfrak{g}$ und G zusammenhängend. Sei $Y \in \mathfrak{g}$ linksinvariant, dann ist $\gamma(t) = \mathrm{Ad}(\exp(tY))$ eine 1–Parametergruppe auf $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ mit $\gamma'(0) = \mathrm{ad}_Y$, d.h. $\gamma(t)$ ist die Integralkurve des linksinvariantes Vektorfeldes $\mathrm{ad}_Y \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ und damit folgt $\gamma'(t) = \mathrm{ad}_Y$ für alle t. Wir betrachten die Funktionen

$$f(t) := \langle \gamma(t)X, Z\rangle - \langle X, \gamma(-t)Z\rangle ,$$

und erhalten $f(0) = 0$ sowie $f'(t) = \langle \mathrm{ad}_Y X, Z\rangle + \langle X, \mathrm{ad}_Y Z\rangle = 0$. Also gilt $f = 0$ bzw.

$$\langle \mathrm{Ad}(\exp(tY))X, Z\rangle = \left\langle X, \mathrm{Ad}(\exp(tY))^{-1}Z\right\rangle$$

für alle t und $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Da die Exponentialabbildung exp ein lokaler Diffeomorphismus um 0 ist, erzeugt $\exp(\mathfrak{g})$ die zusammenhängende Gruppe G. Dies liefert die Ad–Invarianz des Skalarproduktes. □

Bemerkung 3.1.5 (Übung)**.** Sei $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ eine Lieuntergruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$, dann ist die adjungierte Darstellung von G gegeben durch

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}),\ A \mapsto (B \mapsto ABA^{-1}).$$

Um nun die Existenz von biinvarianten Metriken auf G zu untersuchen, definieren wir zuerst die invariante Integration über Liegruppen. Sei M^n eine orientierte Mannigfaltigkeit, dann gibt es genau ein Integral

$$\Omega^n_{cpt}(M) = \{n - \text{Formen mit kompaktem Träger}\} \to \mathbb{R},\ \alpha \mapsto \int_M \alpha$$

mit folgenden Eigenschaften:

- Für jede orientierungserhaltende Karte $\varphi : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \Omega^n(M)$ mit $\mathrm{supp}(\alpha) \subseteq U$ gilt:

$$\int_M \alpha = \int_U \alpha = \int_V (\varphi^{-1})^*(\alpha) = \int_V a(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

  wobei $(\varphi^{-1})^* \alpha = a(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

- $\int_M : \Omega^n_{cpt}(M) \to \mathbb{R}$ ist linear.

Durch Auswahl einer n–Form $\omega \in \Omega^n_{cpt}(M)$ kann man damit ein lineares Funktional auf $C^0(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \ \text{ stetig}\}$ definieren:

$$\int_M : C^0(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_M f \cdot \omega.$$

Lemma 3.1.6. *Sei G eine kompakte, orientierte, n–dimensionale Liegruppe. Dann gibt es genau eine linksinvariante n–Form $dg \in \Omega^n(G)$ mit $\int_G dg = 1$. Das Funktional $\int_G : C^0(G) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int f(g) dg$ heißt invariantes Integral.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Satz 3.1.7. *Sei G eine kompakte Liegruppe und $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine Darstellung von G auf dem endlich dimensionalen Vektorraum V. Dann gibt es ein G–invariantes Skalarprodukt auf V.*

Beweis. Sei $\beta(.,.)$ eine beliebige positiv definite symmetrische Bilinearform auf V, dann ist $\beta_{x,y} : G \to \mathbb{R}$, $g \mapsto \beta(gx, gy)$ stetig für alle $x, y \in V$ und nach Wahl einer Orientierung auf G ist

$$\langle x, y \rangle := \int_G \beta_{x,y}(g) dg$$

offensichtlich eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf V. Noch zu zeigen: $\langle .,. \rangle$ ist G–invariant:

$$\begin{aligned}\langle hx, hy \rangle = \int_G \beta_{hx,hy}(g)dg = \int_G \beta(ghx, ghy)dg = \int_G \beta_{x,y}(gh)dg \\ = \int_G \beta_{x,y}(g)dg = \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

(4. Gleichheitszeichen folgt aus Übungsaufgabe). □

Korollar 3.1.8. *Sei G eine kompakte Liegruppe, dann trägt G eine biinvariante Metrik.*

Beweis. Nach letztem Satz besitzt $\mathfrak{g}$ ein Ad–invariantes Skalarprodukt, also folgt die Aussage aus Satz 3.1.4. □

3.2 Zusammenhang und Krümmung einer biinvarianten Metrik

Satz 3.2.1. *Sei G eine Liegruppe mit biinvarianter Metrik, dann ist der Levi–Civita Zusammenhang gegeben durch*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$

für $X, Y \in \mathfrak{g} = \{$linksinvariante Vektorfelder$\}$. Weiterhin gilt unter dem Isomorphismus $\mathfrak{g} \cong T_eG$: $\exp = \exp'_e$ wobei $\exp'_e : T_eG \to G$ die Riemannsche–Exponentialabbildung der biinvarianten Metrik bezeichnet.

Beweis. $\nabla_X Y := \frac{1}{2}[X, Y]$ für $X, Y \in \mathfrak{g}$ definiert einen eindeutigen Zusammenhang auf $TG \cong G \times \mathfrak{g}$. Seien $X, Y \in \mathfrak{g}$, dann erhalten wir die Torsionsfreiheit dieses Zusammenhangs

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \frac{1}{2}[X, Y] - \frac{1}{2}[Y, X] = 0.$$

Da $\langle .,. \rangle$ biinvariant ist, folgt $X \langle Y, Z \rangle = 0$ für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, d.h. die Schiefsymmetrie von ad_X zeigt

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle &= \frac{1}{2} \langle [X, Y], Z \rangle + \frac{1}{2} \langle Y, [X, Z] \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle \mathrm{ad}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \mathrm{ad}_X Z \rangle \right) = 0\end{aligned}$$

und damit gilt: ∇ ist ein metrischer Zusammenhang auf TG. Dies beweist $\nabla = \nabla^{LC}$. Für die zweite Aussage betrachten wir die 1–Parametergruppe γ zum linksinvarianten Vektorfeld X. Dann gilt

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = (\nabla_X X)_{|\mathrm{Im}(\gamma)} = \frac{1}{2}[X, X] = 0$$

d.h. γ ist eine Geodätische mit $\gamma(0) = e$ und $\gamma'(0) = X_e$. Also folgt $\exp(X) = \gamma(1) = \exp'_e(X_e)$. $\square$

Satz 3.2.2. *Sei G eine Liegruppe mit biinvarianter Metrik, dann sind die Riemannschen Krümmungsgrößen gegeben durch $[X, Y, Z \in \mathfrak{g}]$:*

(i) $R_{X,Y}Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z]$.

(ii) $K(X,Y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\langle [X,Y],[X,Y] \rangle}{\langle X,X \rangle \cdot \langle Y,Y \rangle - \langle X,Y \rangle^2}$

(iii) $\mathrm{Ric}(X,Y) = -\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y)$.

Insbesondere besitzt eine Liegruppe mit biinvarianter Metrik nicht negative Schnittkrümmung.

Beweis.

$$\begin{aligned} R_{X,Y}Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= \frac{1}{2} \left(\nabla_X [Y,Z] - \nabla_Y [X,Z] - [[X,Y],Z] \right) \\ &= \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] - \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\ &= \frac{1}{4}[[X,Y],Z] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(X,Y) = \frac{R(X,Y,Y,X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y \rangle^2} &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\langle [[X,Y],Y],X \rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y \rangle^2} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\langle [X,Y],[Y,X] \rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y \rangle^2} \end{aligned}$$

Sei $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{g}$ eine ON-Basis, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(X,Y) &= -\sum_{i=1}^{n} R(X,E_i,Y,E_i) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \langle [[X,E_i],Y],E_i \rangle \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{ad}_Y(\mathrm{ad}_X(E_i)),E_i \rangle = -\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_X). \end{aligned}$$

Da der Ricci Tensor symmetrisch ist, folgt die Behauptung. $\square$

Definition 3.2.3. Für eine beliebige Liegruppe G heißt

$$\nabla_X Y := \frac{1}{2}[X,Y], \qquad X, Y \in \mathfrak{g}$$

der *kanonisch linksinvariante Zusammenhang*.

Übung 3.2.4. Jede biinvariante Metrik auf SO(3) und SU(2) besitzt konstant positive Schnittkrümmung.

3.3 Struktur kompakter Liegruppen

Definition 3.3.1. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, dann heißt

$$B = B_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}, \ (X,Y) \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y)$$

die Killing–Form von $\mathfrak{g}$.

Satz 3.3.2.

1. *Die Killing–Form B ist eine symmetrische Bilinearform.*
2. *B ist $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ invariant.*
3. *$B([X,Y],Z) = B(X,[Y,Z])$ für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 3.3.3.

- Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, dann ist ein Unterraum $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ein *Ideal*, wenn $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. Insbesondere ist ein Ideal eine Lieunteralgebra.
- Eine nicht abelsche Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt *einfach*, wenn $\{0\}$ und $\mathfrak{g}$ die einzigen Ideale in $\mathfrak{g}$ sind. $\mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ mit $\mathfrak{g}_k$ einfach.
- Eine zusammenhängende nicht abelsche Liegruppe G heißt *(halb)einfach*, wenn die Liealgebra von G (halb)einfach ist.
- $Z(G) := \{g \in G \,|\, gh = hg \ \forall h \in G\}$ und $Z(\mathfrak{g}) = \{v \in \mathfrak{g} \,|\, [v,w] = 0 \ \forall w \in \mathfrak{g}\}$ heißt *Zentrum* von G bzw. $\mathfrak{g}$.

Bemerkung 3.3.4.

- Für Liealgebren $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ bezeichnet $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ die Liealgebra mit
$$[(a_1,a_2),(b_1,b_2)] := ([a_1,b_1]_{\mathfrak{g}_1}, [a_2,b_2]_{\mathfrak{g}_2}) \,.$$
- Für Liegruppen G_1, G_2 mit Liealgebren $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ ist $G_1 \times G_2$ eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$.
- Ist $H \subseteq G$ eine normale Lieuntergruppe, dann ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ein Ideal und G/H ist eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.
- $Z(G)$ ist eine normale Lieuntergruppe von G mit Ideal $Z(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$.

Bemerkung 3.3.5 (Übung)**.** Eine Liealgebra ist genau dann halbeinfach, wenn ihre Killing–Form nicht entartet ist.

Satz 3.3.6. *Sei G eine kompakte Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$. Dann gilt*

$$\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$$

mit $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ halbeinfaches Ideal und Killing–Form $B_{\mathfrak{h}} < 0$.

Beweis. Sei $\langle .,. \rangle$ ein Ad–invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$ (existiert da G kompakt), dann ist $\mathrm{ad}_v \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ schiefsymmetrisch für alle $v \in \mathfrak{g}$. Folglich ist $\mathrm{ad}_v \circ \mathrm{ad}_v$ symmetrisch mit nicht positiven Eigenwerten für alle $v \in \mathfrak{g}$. Damit folgt $B_{\mathfrak{g}}(v, v) \leq 0$ für alle $v \in \mathfrak{g}$ und es gilt $B_{\mathfrak{g}}(v, v) = 0$ genau dann, wenn $\mathrm{ad}_v \circ \mathrm{ad}_v = 0$. Dies ist äquivalent zu $\mathrm{ad}_v = 0$ bzw. $v \in Z(\mathfrak{g})$. Sei jetzt $\mathfrak{h}$ das orthogonale Komplement von $Z(\mathfrak{g})$ bezüglich des invarianten Produktes $\langle .,. \rangle$, dann folgt offensichtlich $B_{\mathfrak{g}} < 0$ auf $\mathfrak{h}$. Noch zu zeigen: $\mathfrak{h}$ ist ein halbeinfaches Ideal, denn dann gilt nach Konstruktion $(B_{\mathfrak{g}})_{|\mathfrak{h}} = B_{\mathfrak{h}}$. Wegen $[\mathfrak{h}, Z(\mathfrak{g})] = 0$ ist $\mathfrak{h}$ ein Ideal, wenn $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ gilt. Seien also $v, w \in \mathfrak{h}$ und $x \in Z(\mathfrak{g})$, dann folgt $[v, w] \in \mathfrak{h}$ aus:

$$\langle [v, w], x \rangle = \langle \mathrm{ad}_v w, x \rangle = - \langle w, \mathrm{ad}_v x \rangle = - \langle w, [v, x] \rangle = 0.$$

Insbesondere ist die Killing form von $\mathfrak{h}$ negativ definit (man beachte, es gilt $\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}(v) = \mathrm{ad}^{\mathfrak{h}}(v) \oplus 0$ für alle $v \in \mathfrak{h}$). Es bleibt zu zeigen: $\mathfrak{h}$ ist halbeinfach. Sei $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{h}$ ein Ideal und $\mathfrak{k}^{\perp}$ das orthogonale Komplement von $\mathfrak{k}$ bzgl. des invarianten Skalarproduktes $-B_{\mathfrak{h}}$. Dann gilt für $v \in \mathfrak{k}$, $w \in \mathfrak{k}^{\perp}$ und $x \in \mathfrak{h}$:

$$B_{\mathfrak{h}}([w, x], v) = B_{\mathfrak{h}}(w, \underbrace{[x, v]}_{\in \mathfrak{k}}) = 0,$$

d.h. $[\mathfrak{k}^{\perp}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{k}^{\perp}$. Wir erhalten insbesondere $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}^{\perp}$ als Liealgebra mit Killing–Form $B_{\mathfrak{h}} = B_{\mathfrak{k}} \oplus B_{\mathfrak{k}^{\perp}}$. Induktiv zerlegt man also $\mathfrak{h}$ in Ideale bis einfache Liealgebren entstehen und erhält $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{k}_m$ mit $\mathfrak{k}_i$ einfache Liealgebra. □

Lemma 3.3.7. *Sei G eine zusammenhängende kompakte Liegruppe, dann gilt*

$$\dim Z(G) = \dim Z(\mathfrak{g}) = \dim H^1(G; \mathbb{R}).$$

Beweis. Wähle eine biinvariante Metrik auf G. Sei $X \in Z(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$ ein linksinvariantes Vektorfeld. Dann gilt $\nabla_Y X = \frac{1}{2}[Y, X] = 0$ für alle $Y \in \mathfrak{g}$, d.h. X ist parallel: $\nabla X = 0$. Insbesondere ist die Abbildung

$$Z(\mathfrak{g}) \to \{\text{parallele Vektorfelder auf } G\} \cong \{\text{parallele 1-Formen auf } G\}$$

injektiv. Jede parallele 1–Form ist harmonisch, d.h. das Hodge-deRham Theorem liefert $\dim Z(\mathfrak{g}) \leq b_1$ für die erste Betti Zahl b_1. Umgekehrt folgt aus dem letzten Satz und der Ricci Krümmung von biinvarianten Metriken:

$$\mathrm{Ric} = -\frac{1}{4} B_{\mathfrak{g}} \geq 0,$$

d.h. das Theorem von Bochner zeigt: Jede harmonische 1–Form ist parallel. Dies induziert ein (linksinvariantes) paralleles Vektorfeld X, d.h. $X \in \mathfrak{g}$ liefert $\dim Z(G) = b_1$. □

Satz 3.3.8. *Für eine zusammenhängende Liegruppe G sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) G ist kompakt und $Z(G)$ ist diskret.

(ii) G ist kompakt und $\pi_1(G)$ ist endlich.

(iii) Die universelle Überlagerung von G ist kompakt.

(iv) Die Killing–Form ist negativ definit: $B_{\mathfrak{g}} < 0$.

Beweis. $(ii) \Rightarrow (i)$ folgt aus Lemma 3.3.7. $(i) \Rightarrow (iv)$ folgt aus Satz 3.3.6, d.h. zu zeigen: $(iv) \Rightarrow (ii)$. Biinvariante Metriken sind vollständig und da $-B_{\mathfrak{g}}$ Ad–invariant ist, definiert $-B_{\mathfrak{g}}$ eine vollständige Riemannsche Metrik auf G mit $\mathrm{Ric} = -\frac{1}{4}B_{\mathfrak{g}}$. Nach Bonnet–Myers ist G kompakt mit endlicher Fundamentalgruppe und Durchmesser $\mathrm{diam}(G) \leq 2\pi$. $\square$

Der Vorteil einer negativ definiten Killing–Form ist die Interpretation von G als Überlagerung einer Matrix–Liegruppe. Sei G eine zusammenhängende, kompakte Liegruppe mit $\pi_1(G)$ endlich. Wir betrachten jetzt die adjungierte Darstellung $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ der Liegruppe und die zugehörige Darstellung der Liealgebra $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Aus $B_{\mathfrak{g}} < 0$ folgt die Injektivität von ad, d.h. $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ ist eine Lieunteralgebra von $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ und isomorph zu $\mathfrak{g}$. $\mathrm{Ad}(\exp(X)) = e^{\mathrm{ad}(X)}$ zeigt die lokale Injektivität von $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Da G weiterhin kompakt ist, erhalten wir eine kompakte Lieuntergruppe $G' := \mathrm{Ad}(G) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ mit Liealgebra $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Mat}(m, \mathbb{R})$. Dies beweist: $\mathrm{Ad} : G \to G'$ ist eine Überlagerung der kompakten zusammenhängenden Matrix–Liegruppe G'. Sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine Lieunteralgebra und bezeichne $\mathfrak{h}^{\perp}$ das orthogonale Komplement von $\mathfrak{h}$ bzgl. des Ad–invarianten Skalarproduktes $-B_{\mathfrak{g}}$, dann ist $\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}) \oplus \mathrm{Id}_{\mathfrak{h}^{\perp}} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ eine abgeschlossene Untergruppe, d.h.

$$H := \{g \in G \,|\, \mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h},\ \mathrm{Ad}(g)_{|\mathfrak{h}^{\perp}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{h}^{\perp}}\}$$

ist eine wohldefinierte Lieuntergruppe von G (Ad ist stetig, also ist H abgeschlossene Untergruppe von G). Die Liealgebra von H besteht offensichtlich aus allen $X \in \mathfrak{g}$ mit $\mathrm{ad}_X(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}$ und $\mathrm{ad}_X(\mathfrak{h}^{\perp}) = 0$. Aufgrund der Injektivität von ad, der Schiefsymmetrie von ad_X bzgl. $-B_{\mathfrak{g}}$ und $\mathrm{ad}_X Y = -\mathrm{ad}_Y X$ ist die Lieunteralgebra von H durch $\mathfrak{h}$ gegeben (kleine Rechnung). Betrachtet man nur die Zusammenhangskomponente der Eins von H, so erhalten wir im Fall $B_{\mathfrak{g}} < 0$: Zu jeder Lieunteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ gibt es eine zusammenhängende Lieuntergruppe $H \subseteq G$, und zu jedem Ideal $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ gibt es eine zusammenhängende normale Lieuntergruppe $H \subseteq G$. Sei jetzt $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ eine Zerlegung in Ideale und H_1, H_2 zusammenhängende normale Lieuntergruppen von G mit Liealgebra $\mathfrak{h}_1$ bzw. $\mathfrak{h}_2$. Dann ist die Abbildung

$$f : G \to G/H_1 \times G/H_2,\ g \mapsto (gH_1, gH_2)$$

ein wohldefinierter glatter Liegruppenhomomorphismus. Der Kern von f ist die diskrete Lieuntergruppe $H_1 \cap H_2 \subseteq G$ ($H_1 \cap H_2$ besitzt $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 = \{0\}$ als Liealgebra). $df_e : T_eG \to T_{eH_1}G/H_1 \oplus T_{eH_2}G/H_2$ ist ein Isomorphismus und damit ist df_x invertierbar für alle $x \in G$ (übliches Translationsargument). Das heißt, f ist ein lokaler Diffeomorphismus kompakter Mannigfaltigkeiten und folglich eine endliche Überlagerung (Übung). Für eine einfach zusammenhängende kompakte Liegruppe G sowie normale zusammenhängende Lieuntergruppen H_1, H_2 wie oben, ist f ein Diffeomorphismus, denn G/H_1 und G/H_2 sind auch einfach zusammenhängend nach Korollar 2.3.11. Betrachtet man jetzt eine Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_m$ in einfache Liealgebren $\mathfrak{h}_i$, erhält man mit diesen Ausführungen und Satz 3.3.6 das folgende Strukturtheorem für kompakte Liegruppen (für einfach zusammenhängendes kompaktes G' betrachte $K_i = G' / \prod_{j \neq i} H_j$):

Theorem 3.3.9. *Sei G eine zusammmenhängende kompakte Liegruppe, dann ist $G/Z(G)$ eine kompakte halbeinfache Liegruppe, d.h. $G/Z(G)$ besitzt eine halbeinfache Liealgebra. Für die universelle Überlagerung gilt*

$$\widetilde{G/Z(G)} \cong K_1 \times \cdots \times K_m$$

wobei K_i einfach zusammenhängende, einfache und kompakte Liegruppen sind.

Theorem 3.3.10 (Übung)**.** *Sei G eine kompakte, zusammenhängende, abelsche Liegruppe, dann gilt $G \cong T^k$ mit $T^0 := \{e\}$.*

Theorem 3.3.11 ([3, 5])**.** *Sei G eine einfach zusammenhängende, einfache kompakte Liegruppe. Dann ist G isomorph zu genau einer der folgenden Standard–Liegruppen:*

- $\mathrm{SU}(n)$*, $n \geq 2$ (Typ A_{n-1}).*
- $\mathrm{Spin}(2n+1)$*, $n \geq 2$ (Typ B_n).*
- $\mathrm{Sp}(n)$*, $n \geq 3$ (Typ C_n).*
- $\mathrm{Spin}(2n)$*, $n \geq 4$ (Typ D_n).*

oder zu einer der exzeptionellen Liegruppen

$$E_6,\ E_7,\ E_8,\ F_4,\ G_2.$$

Bemerkung 3.3.12. Der Index im Typ $A, \ldots, G$ entspricht dem Rang der Liegruppe, wobei $\mathrm{rk}(G)$ die Dimension eines maximalen Torus in G bezeichnet. Der Grund für die Dimensionsbeschränkungen nach unten sind die Isomorphismen $S^3 = \mathrm{Spin}(3) = \mathrm{SU}(2) = \mathrm{Sp}(1)$, $\mathrm{Sp}(2) = \mathrm{Spin}(5)$ und $\mathrm{SU}(4) = \mathrm{Spin}(6)$. Außerdem ist $\mathrm{Spin}(4)$ nur halbeinfach: $\mathrm{Spin}(4) = \mathrm{Spin}(3) \times \mathrm{Spin}(3)$.

3.4 Grundlagen in Darstellungstheorie

Definition 3.4.1. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$–Vektorraum, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, und $\chi : G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine Darstellung der Liegruppe G auf V, d.h. χ ist ein Liegruppenhomomorphismus.

- Ein Unterraum $W \subseteq V$ heißt *G–invariant* beziehungsweise *χ–invariant*, wenn $\chi(G)(W) \subseteq W$ gilt.

- $\chi : G \to \mathrm{Aut}(V)$ heißt *irreduzibel*, falls für jeden G–invarianten Unterraum $W \subseteq V$ folgt $W = \{0\}$ oder $W = V$.

- $\chi : G \to \mathrm{Aut}(V)$ heißt *reduktiv*, falls es eine Zerlegung $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ in G–invariante irreduzible Unterräume $V_i \subseteq V$ gibt.

- Darstellungen $\chi_1 : G \to \mathrm{Aut}(V_1)$ und $\chi_2 : G \to \mathrm{Aut}(V_2)$ heißen *äquivalent*, wenn es einen Isomorphismus $\rho : V_1 \to V_2$ gibt, so dass $\rho \circ \chi_1(g) = \chi_2(g) \circ \rho$ für alle $g \in G$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mathrm{End}_G(V_1)$ die G–invarianten Endomorphismen auf V_1 sowie mit $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ die G–invarianten linearen Abbildungen $\rho : V_1 \to V_2$, d.h. $\rho \circ \chi_1(g) = \chi_2(g) \circ \rho$ für alle $g \in G$.

Lemma 3.4.2 (Schur). *a) Seien $\chi_i : G \to \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, irreduzibel und $\rho : V_1 \to V_2$ linear mit $\rho \circ \chi_1(g) = \chi_2(g) \circ \rho$ für alle $g \in G$. Dann ist ρ ein Isomorphismus oder $\rho \equiv 0$.*

b) Sei $\chi : G \to \mathrm{Aut}(V)$ irreduzibel und $\rho \in \mathrm{End}_G(V)$. Besitzt ρ einen Eigenwert (z.B. im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), dann gilt $\rho = \lambda \cdot \mathrm{Id}_V$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$.

c) Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\chi_i : G \to \mathrm{Aut}(V_i)$ irreduzibel folgt

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \begin{cases} 1 & \dim V_1 = \dim V_2 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Beweis. a) $\ker \rho \subseteq V_1$ und $\mathrm{Im}\ \rho \subseteq V_2$ sind G–invariante Unterräume (kleine Rechnung), also liefert die Irreduzibilität von χ_1, χ_2: $\ker \rho = \{0\}$ oder $\ker \rho = V_1$ sowie $\mathrm{Im}\ \rho = V_2$ bzw. $\mathrm{Im}\ \rho = \{0\}$. Dies zeigt $\rho = 0$ oder ρ ist ein Isomorphismus. b) Sei $V_\lambda \subseteq V$ der Eigenraum zum Eigenwert λ. Da $\{0\} \neq V_\lambda$ ein G–invarianter Unterraum ist und χ irreduzibel, erhalten wir $V_\lambda = V$ sowie $\rho = \lambda \cdot \mathrm{Id}_V$. Aussage c) folgt aus a) und b). □

Satz 3.4.3. *Sei G eine kompakte Liegruppe, $\chi : G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine Darstellung und $W \subseteq V$ ein G–invarianter Unterraum. Dann gibt es einen G–invarianten Unterraum $U \subseteq V$ mit $V = W \oplus U$. Insbesondere sind Darstellungen einer kompakten Liegruppe reduktiv.*

Beweis. Wie oben konstruieren wir ein G–invariantes Skalarprodukt auf V. Dazu wählen wir ein inneres Produkt b auf V und definieren

$$\langle v, w \rangle := \int_G b(\chi(g)v, \chi(g)w) dg, \qquad v, w \in V.$$

Eine kleine Rechnung zeigt die G–Invarianz dieses Skalarproduktes. Sei $W \subseteq V$ ein G–invarianter UR, dann ist $W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, W \rangle = 0\}$ ein G–invarianter UR mit $V = W \oplus W^\perp$. Induktiv zerlegt sich V also in eine direkte Summe $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ mit V_i irreduzibel. □

Beispiel 3.4.4 (Übung). *Sei $G \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ die Liegruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale. Dann ist die Standarddarstellung $G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$, $A \mapsto (v \mapsto Av)$ nicht reduktiv für $n \geq 2$.*

Satz 3.4.5. *a) Sei $\chi : G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine irreduzible Darstellung der kompakten Liegruppe G auf V. Dann gibt es bis auf konstante Vielfache genau ein G–invariantes Skalarprodukt auf V.*

b) Sei G eine kompakte einfache Liegruppe, dann ist jede biinvariante Metrik auf G gegeben durch

$$\langle u, v\rangle (g) = -\lambda \cdot B\big((dL_{g^{-1}})_g(u), (dL_{g^{-1}})_g(v)\big), \qquad u, v \in T_gG$$

mit $\lambda \in (0, \infty)$ und B die Killing–Form von $T_eG = \mathfrak{g}$.

Beweis. a) Seien b_1 und b_2 G–invariante innere Produkte auf V (b_1 existiert da G kompakt). Dann gibt es einen b_2–symmetrischen Isomorphismus $A : V \to V$ mit $b_1(x, y) = b_2(Ax, y)$ für alle $x, y \in V$.

$$b_2(A(gx), y) = b_1(gx, y) = b_1(x, g^{-1}y) = b_2(Ax, g^{-1}y) = b_2(g(Ax), y)$$

liefert die G–Invarianz von A: $A \circ \chi(g) = \chi(g) \circ A$, und da A symmetrisch ist, existiert ein Eigenwert von A. Nach Schur's–Lemma folgt $A = \lambda \cdot \mathrm{Id}$. Dies beweist Teil a) $b_1 = \lambda \cdot b_2$.
b) Wir betrachten die adjungierte Darstellung $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Sei $W \subseteq \mathfrak{g}$ ein Ad–invarianter Unterraum, dann gilt $\mathrm{Ad} \cong \chi_1 \oplus \chi_2$ mit $\chi_1 : G \to \mathrm{Aut}(W)$ und $\chi_2 : G \to \mathrm{Aut}(U)$ für einen zu W komplementären Unterraum $U \subseteq \mathfrak{g}$. Da $\mathrm{ad} = (d\mathrm{Ad})_e = (d\chi_1)_e \oplus (d\chi_2)_e$, ist W auch $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$–invariant, d.h. $[W, \mathfrak{g}] \subseteq W$ zeigt: $W \subseteq \mathfrak{g}$ ist ein Ideal. Da G einfach, folgt $W = \{0\}$ oder $W = \mathfrak{g}$ und Ad ist irreduzibel. Nach Teil a) und Satz 3.1.4 erhalten wir die Behauptung. □

Übung 3.4.6. Definieren Sie Tensorprodukt und direkte Summe von Darstellungen. Definieren Sie Darstellungen $G \to \mathrm{Aut}(\Lambda^k V)$ und $G \to \mathrm{Aut}(V^*)$ zu $G \to \mathrm{Aut}(V)$.

3.5 Invariante Metriken auf homogenen Räumen

Definition 3.5.1. Sei M ein G–homogener Raum, dann heißt eine Riemannsche Metrik g_M auf M *G–invariant*, wenn $L_h \in \mathrm{Isom}(M, g_M)$ für alle $h \in G$ gilt, d.h. $L_h : M \to M$, $x \mapsto h \cdot x$ ist eine Isometrie für alle $h \in G$: $L_h^* g_M = g_M$.

Bemerkung 3.5.2. Ist $M = G$ eine Liegruppe, dann sind die G–invarianten Metriken auf M genau die linksinvarianten Metriken auf G. Ein G–homogener Raum M mit G–invarianter Metrik ist insbesondere Riemannsch homogen (G wirkt transitiv durch Multiplikation von Links also wirkt auch $\mathrm{Isom}(M, g_M)$ transitiv).

Satz 3.5.3. *Sei $M = G/H$ homogen mit kompaktem H, dann existiert eine G–invariante Metrik auf M.*

Beweis. Sei $p \in M$ fest gewählt und $H = G_p = \{f \in G|\, h \cdot p = p\}$. Wir betrachten die Darstellung $\chi : H \to \mathrm{Aut}(T_pM)$, $h \mapsto (dL_h)_p$. Da H kompakt ist, gibt es ein χ–invariantes Skalarprodukt g_0 auf T_pM. Für $q \in M$ gibt es ein $a \in G$ mit $a \cdot p = q$, d.h. wir definieren für $v, w \in T_qM$:

$$g(v, w) := g_0((dL_{a^{-1}})v, (dL_{a^{-1}})w).$$

Betrachte $b \in G$ mit $b \cdot p = q$, dann gilt $a^{-1}b \cdot p = p$, d.h. $a^{-1}b \in H$ zeigt die Wohldefiniertheit von g:

$$\begin{aligned} g_0(dL_{a^{-1}}v, dL_{a^{-1}}w) &= g_0(dL_{a^{-1}}(dL_b \cdot dL_{b^{-1}}v), dL_{a^{-1}}(dL_b \cdot dL_{b^{-1}}w)) \\ &= g_0(\chi(a^{-1}b)(dL_{b^{-1}}v), \chi(a^{-1}b)(dL_{b^{-1}}w)) \\ &= g_0(dL_{b^{-1}}v, dL_{b^{-1}}w). \end{aligned}$$

Noch zu zeigen: g ist G–invariant. Dazu sei $a \in G$ beliebig, $v, w \in T_qM$ und $b \in G$ derart, dass $b \cdot p = a \cdot q$ gilt. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} g(dL_a(v), dL_a(w)) &= g_0(dL_{b^{-1}}(dL_a(v)), dL_{b^{-1}}(dL_a(w))) \\ &= g_0(dL_{b^{-1}a}(v), dL_{b^{-1}a}(w)) = g(v, w), \end{aligned}$$

d.h. $L_a : M \to M$ ist eine Isometrie. □

Bemerkung 3.5.4. Umgekehrt folgt natürlich auch für eine G–invariante Metrik auf $M = G/H$ mit kompaktem $H = G_p$, dass $g_{|T_pM}$ ein χ–invariantes Skalarprodukt ist, wobei $\chi : H \to \mathrm{Aut}(T_pM)$, $h \mapsto (dL_h)_p$. Dies liefert wieder eine Bijektion

$$\{G - \text{invariante Metriken auf } M\} \to \{H - \text{invariante Skalarprodukte auf } T_pM\}$$
$$g \mapsto g_{|T_pM}.$$

Definition 3.5.5. Sei $M = G/H$ homogen mit $H = \{h \in G|\, h \cdot p = p\}$, dann heißt

$$\chi : H \to \mathrm{Aut}(T_pM),\ h \mapsto (dL_h)_p$$

die *Isotropiedarstellung* von G/H. $M = G/H$ heißt *isotropie–irreduzibel*, wenn χ irreduzibel ist.

Satz 3.5.6. *Sei $M = G/H$ homogen, isotropie–irreduzibel und H kompakt. Dann trägt M bis auf konstante Vielfache genau eine G–invariante Metrik. Diese G–invariante Metrik g ist Einstein, d.h.* $\mathrm{Ric} = \lambda \cdot g$ *für eine Konstante λ.*

Beweis. Da $\chi : H \to \mathrm{Aut}(T_pM)$ irreduzibel und H kompakt ist, gibt es bis auf Skalierung genau ein H–invariantes Produkt auf T_pM. Noch zu zeigen, die G–invariante Metrik g ist Einstein. Aus $L_h^*g = g$ folgt $L_h^*\mathrm{Ric} = \mathrm{Ric}$ für alle $h \in G$, d.h. Ric ist ein G–invarianter $(0, 2)$–Tensor auf M. Nach den obigen Ausführungen ist dies äquivalent dazu, dass $\mathrm{Ric}_p = \mathrm{Ric}_{|T_pM}$ eine H–invariante symmetrische Bilinearform auf T_pM ist. Wir betrachten jetzt den Endomorphismus $A \in \mathrm{End}(T_pM)$ mit

$$\mathrm{Ric}_p(x, y) = g_p(Ax, y) \qquad \forall x, y \in T_pM.$$

Da Ric_p und g_p χ–invariant sind, ist auch A χ–invariant: $\chi(h)A = A\chi(h)$ für alle $h \in H$. Da A symmetrisch ist, besitzt A einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, und aus dem Lemma von Schur folgt $A = \lambda \cdot \mathrm{Id}$. Aufgrund der G–Invarianz von Ric erhalten wir $\mathrm{Ric} = \lambda \cdot g$ auf ganz M. $\square$

Sei $M = G/H$ homogen mit kompaktem H und $\mathrm{Ad}^G : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ die adjungierte Darstellung der Liegruppe G auf ihrer Liealgebra $\mathfrak{g}$. Dann gibt es einen Unterraum $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$ derart, dass $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ mit Lieunteralgebra $\mathfrak{h} = T_eH$ und

$$\mathrm{Ad}^G_{|H} : H \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}) \oplus \mathrm{Aut}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$$

gilt. Die Darstellung $\mathrm{Ad}^G_{|H}$ zerlegt sich also in eine direkte Summe zweier Darstellungen $\rho^{\mathfrak{h}} : H \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{h})$ und $\rho^{\mathfrak{p}} : H \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{p})$, d.h. $\mathrm{Ad}^G_{|H} \cong \rho^{\mathfrak{h}} \oplus \rho^{\mathfrak{p}}$. Die Existenz des Unterraumes $\mathfrak{p}$ folgt wieder aus der Kompaktheit von H, wir wählen einfach ein $\mathrm{Ad}^G_{|H}$–invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$ und definieren $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$ als das orthogonale Komplement von $\mathfrak{h}$. In der Sprache der Liealgebren bedeutet diese Zerlegung $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$.

Satz 3.5.7. *Sei $M = G/H$ homogen mit H kompakt, dann gilt*

(i) $\rho^{\mathfrak{h}} = \mathrm{Ad}^H : H \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{h})$ *ist die adjungierte Darstellung der Liegruppe H auf ihrer Liealgebra.*

(ii) $\rho^{\mathfrak{p}}$ *ist äquivalent zur Isotropiedarstellung $\chi : H \to \mathrm{Aut}(T_pM)$, d.h. es gibt einen Isomorphismus $\Phi : T_pM \to \mathfrak{p}$ mit $\Phi \circ \chi(h) = \rho^{\mathfrak{p}}(h) \circ \Phi$ für alle $h \in H$.*

Beweis. (i): Dies folgt aus der Definition von $\mathrm{Ad}^G : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, $g \mapsto (d\mathrm{Int}^G_g)_e$. Für $h \in H \subseteq G$ und $v \in \mathfrak{h}$ gilt $(d\mathrm{Int}^G_h)_e(v) = (d\mathrm{Int}^H_g)_e(v) \in \mathfrak{h}$, d.h. $\rho^{\mathfrak{h}} = \mathrm{Ad}^H$.
(ii) Sei $\pi : G \to G/H$ die Projektion mit $\pi(e) = p$. Zu zeigen ist die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{p} & \xrightarrow{\rho^{\mathfrak{p}}(h)} & \mathfrak{p} \\ {\scriptstyle (d\pi_e)_{|\mathfrak{p}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (d\pi_e)_{|\mathfrak{p}}} \\ T_pM & \xrightarrow{\chi(h)} & T_pM \end{array}$$

denn $\ker(d\pi_e) = \mathfrak{h}$ und $(d\pi_e)_{|\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \subset T_eG \to T_pM$ ist ein Isomorphismus. Sei $X \in \mathfrak{g}$, dann gilt

$$d\pi_e(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\pi \circ \exp(tX)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\exp(tX)H).$$

Für $X \in \mathfrak{p}$ und $h \in H$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
d\pi_e(\rho^{\mathfrak{p}}(h)(X)) &= d\pi_e(\mathrm{Ad}^G(h)(X)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\mathrm{Ad}(h)(X))H \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (h \cdot \exp(tX) \cdot h^{-1})H = \chi(h) \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX)H \\
&= \chi(h)(d\pi_e(X)).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 3.5.8. *a) Die Standardsphäre $S^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ ist isotropie–irreduzibel, denn es gilt $\mathrm{Ad}^{\mathrm{SO}(n+1)}_{|\mathrm{SO}(n)} \cong \Lambda^2\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, d.h. die Isotopiedarstellung von $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ ist die Standarddarstellung $\mathrm{SO}(n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$, $A \mapsto (v \mapsto Av)$, und diese ist natürlich irreduzibel.*

b) $\mathbb{C}P^n = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{U}(n)$ und $\mathbb{H}P^n = \mathrm{Sp}(n+1)/(\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n))$ sind auch isotropie–irreduzibel. Die Isotropiedarstellungen sind gegeben durch

$$\begin{gathered}
\mathrm{U}(n) \hookrightarrow \mathrm{SO}(2n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^{2n}), \\
\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n) \hookrightarrow \mathrm{SO}(4n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^{4n}).
\end{gathered}$$

c) Sei G eine Liegruppe mit $\dim G > 1$. Dann ist der homogene Raum $G = G/\{e\}$ nicht isotropie–irreduzibel. Insbesondere ist die G–invariante Metrik nicht eindeutig.

d) $S^{2n+1} = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n)$ und $S^{4n+3} = \mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(n)$ sind nicht isotropie–irreduzibel (Übung).

Wolf (1984) und Wang, Ziller (1991) haben die isotropie–irreduziblen homogenen Räume vollständig klassifiziert. Es stellt sich jetzt die Frage, ob es auch im nicht isotropie–irreduziblen Fall ausgezeichnete G–invariante Metriken auf $M = G/H$ gibt. Zusammenfassend haben wir bisher folgende Beziehungen gezeigt ($H \subset G$ kompakte Lieuntergruppe, und es gilt $\mathrm{Ad}^G_{|H} = \mathrm{Ad}^H \oplus \chi$ mit $\chi : H \to \mathrm{Aut}(T_pM)$ die Isotopiedarstellung):

$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{matrix}\mathrm{Ad}^G\text{–invariante} \\ \text{Skalarprodukte auf } \mathfrak{g}\end{matrix}\right\} \arrow[r, leftrightarrow, "1:1"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "(1)"] & \left\{\begin{matrix}\text{biinvariante} \\ \text{Metriken auf } G\end{matrix}\right\} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "(2)"] & \left\{\begin{matrix}\text{linksinvariante} \\ \text{Metriken auf } G\end{matrix}\right\} \\
\left\{\begin{matrix}\mathrm{Ad}^G_{|H}\text{–invariante} \\ \text{Skalarprodukte auf } \mathfrak{g}\end{matrix}\right\} \arrow[r, two heads, shift left] & \left\{\begin{matrix}\chi\text{–invariante Skalar-} \\ \text{produkte auf } T_pM,\end{matrix}\right\} \arrow[l, hook', shift left] \arrow[r, leftrightarrow, "1:1"] & \left\{\begin{matrix}G\text{–invariante} \\ \text{Metriken auf } G/H\end{matrix}\right\}
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung (2) wird von (1) induziert. Alle anderen Abbildungen sind oben definiert oder offensichtlich.

Definition 3.5.9. Sei $M = G/H$ homogen mit H kompakt. Dann heißt eine G–invariante Riemannsche Metrik auf M *normal homogen*, wenn sie von einer biinvarianten Metrik auf G induziert ist.

Bemerkung 3.5.10. Eine normal homogene Metrik auf $M = G/H$ existiert genau dann, wenn G eine biinvariante Metrik trägt. Für einen isotropie–irreduziblen Raum G/H, ist die normal homogene Metrik bis auf Skalierung eindeutig und Einstein (vgl Satz 3.5.6). Ist G eine kompakte einfache Liegruppe, dann gibt es bis auf Skalierung genau eine normal homogene Metrik auf G/H. In diesem Fall muss G/H nicht isotropie–irreduzibel sein, z.B. ist die normal homogene Metrik auf $S^{2n+1} = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n)$ und $S^{4n+3} = \mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(n)$ eindeutig.

Definition 3.5.11. Seien $(\bar{M}, \bar{g})$ und (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\pi : \bar{M} \to M$ eine surjektive Submersion. Dann zerlegt sich $T_{\bar{p}}\bar{M} = \ker(d\pi_{\bar{p}}) \oplus \mathscr{H}_{\bar{p}}$ $\bar{g}$–orthogonal. π heißt *Riemannsche Submersion*, wenn $d\pi_{\bar{p}} : \mathscr{H}_{\bar{p}} \to T_{\pi(\bar{p})}M$ eine Isometrie ist für alle $\bar{p} \in \bar{M}$. $\ker(d\pi) \subseteq T\bar{M}$ bezeichnet die vertikale Distribution und $\mathscr{H} = \bigcup \mathscr{H}_{\bar{p}} \subseteq T\bar{M}$ die horizontale Distribution.

Ist g_M eine Riemannsche Metrik auf $M = G/H$ mit kompaktem H, dann ist g_M genau dann normal homogen, wenn es eine biinvariante Metrik $\bar{g}$ auf G gibt, so dass $\pi : (G, \bar{g}) \to (M, g_M)$ eine Riemannsche Submersion ist.

Theorem 3.5.12 (O'Neill)**.** *Sei $\pi : (\bar{M}, \bar{g}) \to (M, g)$ eine Riemannsche Submersion und $X, Y \in \Gamma(\mathscr{H})$ Vektorfelder mit $\bar{g}(X, X) = \bar{g}(Y, Y) = 1$ und $\bar{g}(X, Y) = 0$. Dann gilt für die Schnittkrümmung:*

$$K_M(d\pi(X), d\pi(Y)) = K_{\bar{M}}(X, Y) + \frac{3}{4}\bar{g}([X, Y]_{|\ker d\pi}, [X, Y]_{|\ker d\pi}),$$

insbesondere $K_M \geq \inf K_{\bar{M}}$.

Damit besitzt jede normal homogene Metrik auf $M = G/H$ nicht negative Schnittkrümmung

$$\begin{aligned} K_M(v, w) &= \frac{1}{4}\langle [v, w]_{\mathfrak{g}}, [v, w]_{\mathfrak{g}} \rangle + \frac{3}{4}\langle [v, w]_{\mathfrak{h}}, [v, w]_{\mathfrak{h}} \rangle \\ &= \langle [v, w]_{\mathfrak{h}}, [v, w]_{\mathfrak{h}} \rangle + \frac{1}{4}\langle [v, w]_{\mathfrak{p}}, [v, w]_{\mathfrak{p}} \rangle \end{aligned}$$

für $v, w \in T_pM \cong \mathfrak{p}$ mit $|v| = |w| = 1$, $\langle v, w \rangle = 0$.

Übung 3.5.13. Die (bis auf Skalierung) eindeutigen normal homogenen Metriken auf

$$S^{2n+1} = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n) \qquad \text{und} \qquad S^{2n+1} = \mathrm{SO}(2n+2)/\mathrm{SO}(2n+1)$$

liefern unterschiedliche Geometrien für $n > 1$.

Beispiel 3.5.14. *Wir berechnen die Krümmung des $\mathbb{C}P^n = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{U}(n)$ mit normal homogener Metrik. Mit analogen Rechnungen erhält man damit auch die Krümmungen der normal homogenen Metrik auf Stiefelmannigfaltigkeiten, Grassmann–Mannigfaltigkeiten,.. Die Liealgebra*

$$\mathrm{su}(n+1) = \{A \in \mathrm{Mat}(n+1, \mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0, A^* + A = 0\}$$

zerlegt sich in $\mathrm{u}(n) \oplus \mathfrak{p}$ *mit*

$$\mathrm{u}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} -\mathrm{tr}(B) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \,\Big|\, B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}), B^* + B = 0 \right\} \subseteq \mathrm{su}(n+1)$$
$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x^* \\ x & 0 \end{pmatrix} \,\Big|\, x \in \mathbb{C}^n \right\} \cong \mathbb{C}^n \subseteq \mathrm{su}(n+1).$$

Definiere $\langle A, B\rangle := -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(AB)$*, dann ist* $\langle .,.\rangle$ $\mathrm{Ad}^{\mathrm{SU}(n+1)}$*–invariant:*

$$\left\langle CAC^{-1}, CBC^{-1}\right\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(CABC^{-1}) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(AB) = \langle A, B\rangle$$

für alle $C \in \mathrm{SU}(n+1)$*. Damit induziert* $\langle .,.\rangle$ *die bis auf Skalierung eindeutige normal homogene Metrik auf* $\mathbb{C}P^n$ *(diese stimmt mit der Fubini Study Metrik überein). Wir betrachten jetzt folgende orthonormale Basis von* $\mathrm{su}(n{+}1)$ *bzgl. des Skalarproduktes* $\langle .,.\rangle$*:* E_{jk}*,* E'_{jk}*,* E_{kk} *mit* $0 \le j < k \le n$*. Bezeichnet* $A(s,r)$ *die* s*–te Zeile und* r*–te Spalte von* A*, so sind die Basiselemente wie folgt gegeben:*

$$\begin{aligned} E_{jk}(s,r) &= \delta_{js}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{ks} \\ E'_{jk}(s,r) &= \mathbb{i}(\delta_{js}\delta_{kr} + \delta_{jr}\delta_{ks}) \\ E_{kk}(s,r) &= \mathbb{i}(\delta_{ks}\delta_{kr} - \delta_{s0}\delta_{r0}). \end{aligned}$$

Die Matrizen E_{0k} *und* E'_{0k}*,* $k = 1\ldots,n$*, definieren die orthonormale Basis von* $\mathfrak{p}$*, d.h. um die Krümmung des* $\mathbb{C}P^n$ *zu berechnen, betrachtet man*

$$\begin{aligned} [E_{0k}, E_{0j}] &= E_{0k}E_{0j} - E_{0j}E_{0k} = \pm E_{kj} \in \mathrm{u}(n) \qquad k \neq j \\ [E'_{0k}, E'_{0j}] &= E'_{0k}E'_{0j} - E'_{0j}E'_{0k} = \pm E_{kj} \in \mathrm{u}(n) \qquad k \neq j \\ [E_{0k}, E'_{0j}] &= E_{0k}E'_{0j} - E'_{0j}E_{0k} = \pm(1-\delta_{kj})E_{kj} + 2\delta_{kj}E_{kk} \in \mathrm{u}(n). \end{aligned}$$

Dies zeigt $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{h}$ *(d.h.* $[v,w]_{\mathfrak{p}} = 0$ *für* $v, w \in \mathfrak{p}$*), und wir erhalten aus dem letzten Theorem die Schnittkrümmung*

$$K(E_{0k}, E_{0j}) = K(E'_{0k}, E'_{0j}) = K(E_{0k}, E'_{0j}) = 1 \qquad \text{für} \quad k \neq j$$

und $K(E_{0k}, E'_{0k}) = 4$ *für* $k = 1,\ldots,n$*, d.h. der Standard* $\mathbb{C}P^n$ *besitzt positive Schnittkrümmung* $K_{\mathbb{C}P^n} \in [1,4]$*.*

Kapitel 4

Symmetrische Räume

4.1 Symmetrische und lokal symmetrische Räume

Definition 4.1.1. Eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *symmetrisch*, wenn es für alle $x \in M$ eine Isometrie $f : M \to M$ mit $f(x) = x$ und $df_x = -\mathrm{Id}_{T_xM}$ gibt. Eine Isometrie $f : M \to M$ mit $f(x) = x$ und $df_x = -\mathrm{Id}_{T_xM}$ heißt *geodätische Reflektion* bzw. *Symmetrie* um x.

Beispiel 4.1.2. *Anschaulich macht man sich sofort klar, das der Euklidische Raum, die Standardsphäre und der hyperbolische Raum symmetrisch sind. Mit Hilfe der charakterisierenden Eigenschaft*

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}, \qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}, \qquad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{h}$$

folgt auch die Symmetrie der Grassmann–Mannigfaltigkeiten mit normal homogener Metrik. Im Gegensatz dazu ist die normal homogene Metrik auf $S^{2n+1} = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n)$ *nicht symmetrisch für* $n > 1$.

Bemerkung 4.1.3. Sei $f : M \to M$ eine geodätische Reflektion um x, dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq T_xM$ der 0 sowie eine offene Umgebung $V \subseteq M$ von x, so dass die Einschränkung der Riemannschen Exponentialabbildung $\exp_x : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist und das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "-\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\exp_x"'] & U \arrow[d, "\exp_x"] \\ V \arrow[r, "f"] & V \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Die Existenz von U und V sind klar. Für den Beweis der Kommutativität wähle zu $u \in U$ die Geodätische $c : [-1, 1] \to V$ mit $c(0) = x$ und $c'(0) = u$. Da f eine Isometrie ist, ist auch $\bar{c} := f \circ c : [-1, 1] \to M$ eine Geodätische mit $\bar{c}(0) = x$ und $\bar{c}'(0) = df_x(c'(0)) = -u$. Für die Geodätische $\gamma(t) := c(-t)$ gilt $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = -u$, d.h. aus dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche DGL folgt $\gamma = \bar{c}$. Damit erhalten wir die Behauptung $\exp(-u) = \gamma(1) = f(c(1)) = f(\exp(u))$.

Definition 4.1.4. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *lokal symmetrisch*, wenn der Riemannsche Krümmungstensor parallel ist: $\nabla R = 0$.

Satz 4.1.5. *Ein symmetrischer Raum (M, g) ist lokal symmetrisch.*

Beweis. Sei $p \in M$ beliebig und f die geodätische Reflektion um p. Da f eine Isometrie ist, erhält f die kovariante Ableitung und die Krümmung, also gilt für $u, v, w, z \in T_pM$

$$-(\nabla_u R)_{v,w} z = f_*((\nabla_u R)_{v,w} z) = (\nabla_{f_* u} R)_{f_* v, f_* w} f_* z = (\nabla_u R)_{v,w} z$$

und damit $(\nabla R) = 0$ in $p \in M$. $\square$

Satz 4.1.6 ([5, 7, 10])**.** *Sei (M, g) einfach zusammenhängend, vollständig und lokal symmetrisch, dann ist (M, g) ein symmetrischer Raum.*

Satz 4.1.7. *Ein symmetrischer Raum ist vollständig und Riemannsch homogen.*

Beweis. (M, g) ist vollständig: Sei $x \in M$, $\exp_x : U \to V$ ein Diffeomorphismus und $c : (a, b) \to M$ eine maximale Geodätische mit $c(0) = x$. Angenommen $a > -\infty$ oder $b < \infty$, dann gilt ohne Einschränkung $a \neq -b$. Andernfalls betrachten wir $\epsilon > 0$ mit $c(\epsilon) \in U$ sowie die Geodätische $c_\epsilon : (a - \epsilon, b - \epsilon) \to M$, $c_\epsilon(t) := c(t + \epsilon)$. Sei $f \in \mathrm{Isom}(M, g)$ die geodätische Reflektion um $c(0)$ und $\bar{c} : (-b, -a) \to M$ die Kurve mit $\bar{c}(t) := f(c(-t))$, dann ist $\bar{c}$ eine Geodätische (da f Isometrie) mit $\bar{c}(0) = c(0)$ und $\bar{c}'(0) = c'(0)$, also gilt $\bar{c} = c$ in U und durch iteratives Anwenden der Exponentialabbildung auf $\mathrm{Im}(c)$ folgt $\bar{c} = c$ auf dem Intervall $(a, b) \cap (-b, -a)$. Im Fall $b < \infty$ bzw. $a > -\infty$ erhalten wir wegen $a \neq -b$ einen Widerspruch zur Maximalität von c. Hopf–Rinow liefert also die Vollständigkeit.

(M, g) ist Riemannsch homogen: Seien $p, q \in M$ beliebig und $c : [0, a] \to M$ eine minimale Geodätische mit $c(0) = p$, $c(a) = q$. Dann gibt es eine Zerlegung von $c([0, a])$ mit folgenden Eigenschaften: zu Punkten $x_1, \dots, x_m \in c([0, a])$, $x_1 = p$, $x_m = q$ existieren offene Umgebungen $0 \in U_{x_j} \subseteq T_{x_j}M$ und $V_{x_j} \subseteq M$, so dass $\exp_{x_j} : U_{x_j} \to V_{x_j}$ ein Diffeomorphismus ist und $x_{j-1}, x_{j+1} \in V_{x_j}$. Wähle jetzt $a_j \in [0, a]$ mit $c(a_j) = x_j$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ und $b_j := \frac{1}{2}(a_{j+1} - a_j) + a_j$ für $j \in \{1, \dots, m - 1\}$. Sei $y_j := c(b_j)$ und $f_j \in \mathrm{Isom}(M, g)$ die Symmetrie um $y_j \in c([0, a])$, dann folgt aus dem kommutativen Diagramm (4.1): $f_j(x_j) = x_{j+1}$ für alle $j \in \{1, \dots, m - 1\}$. Insbesondere definiert

$$f := f_{m-1} f_{m-2} \cdots f_1 : M \to M$$

eine Isometrie auf M mit $f(p) = q$, d.h. $\mathrm{Isom}(M, g)$ wirkt transitiv auf M. $\square$

4.2 Charakterisierung symmetrischer Räume

Bemerkung 4.2.1. Sei G eine Liegruppe, H eine Lieuntergruppe und $G_0 \subseteq G$ die Zusammenhangskomponente der Eins. Ist G/H zusammenhängend, dann ist

$$G_0/K \to G/H, \ gK \mapsto gH$$

ein Diffeomorphismus, wobei $K := G_0 \cap H$. Insbesondere kann man sich für zusammenhängende homogene Räume M auf zusammenhängende Liegruppenwirkungen beschränken (Übungsaufgabe).

Nach Bemerkung 2.2.6 ist die Isotropiegruppe kompakt, d.h. für einen symmetrischen Raum (M, g) gilt

$$M = G/H$$

mit $G := (\mathrm{Isom}(M, g))_0$ die Zusammenhanskomponente der Eins und einer kompakten Lieuntergruppe $H \subseteq G$. Wir betrachten den Punkt $p = eH \in M$, d.h. $H = \{f \in G| \ f(p) = p\}$. Dann definiert die geodätische Reflektion $h_p : M \to M$ um p einen Liegruppenhomomorphismus

$$\sigma : G \to G, \ f \mapsto h_p \circ f \circ h_p = h_p \circ f \circ h_p^{-1}$$

mit $\sigma^2 = \mathrm{Id}$, d.h. $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ ist eine Involution (hier benutzen wir $h_p^2 = \mathrm{Id}$). Sei $G^\sigma := \{f \in G| \ \sigma(f) = f\}$, dann ist $G^\sigma \subseteq G$ eine Lieuntergruppe.

Theorem 4.2.2 (Cartan). *(i) Sei $(M = G/H, g_M)$ symmetrisch, dann gilt $H_0 = (G^\sigma)_0 \subseteq H \subseteq G^\sigma$.*

(ii) Umgekehrt sei G eine zusammenhängende Liegruppe, $H \subseteq G$ eine kompakte Untergruppe und $\sigma : G \to G$ ein Liegruppenhomomorphismus mit $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ sowie $(G^\sigma)_0 \subseteq H \subseteq G^\sigma$. Dann trägt $M = G/H$ eine G–invariante Riemannsche Metrik g_M und (M, g_M) ist ein symmetrischer Raum.

Beweis. (i): Sei $f \in H$, dann gilt $f(p) = p$ und $\sigma(f)(p) = h_p(f(h_p(p))) = p$ sowie

$$(d\sigma(f))_p = (dh_p)_p (df)_p (dh_p)_p = (df)_p$$

d.h. wie erhalten $\sigma(f) = f$ (eine Isometrie $f : M \to M$ ist eindeutig durch $f(q)$ und $(df)_q$ bestimmt). Damit liefert $f \in G^\sigma$: $H \subseteq G^\sigma$ und $H_0 \subseteq (G^\sigma)_0$. Noch zu zeigen: $(G^\sigma)_0 \subseteq H$, denn dann folgt auch $(G^\sigma)_0 = H_0$. Sei $\gamma(t) \in (G^\sigma)_0$ eine Kurve mit $\gamma(0) = e$, dann gilt $\gamma(t) = \sigma(\gamma(t)) \in \mathrm{Isom}(M, g)$. Also liefert $\gamma(t)(p) = h_p(\gamma(t)(p))$: $\gamma(t)(p)$ ist ein Fixpunkt von h_p für alle t. Es gilt aber $\gamma(0)(p) = p$ und p ist isolierter Fixpunkt von h_p, d.h. wir erhalten $\gamma(t)p = p$ und damit $\gamma(t) \in H$ für alle t.

(ii): Die Existenz einer G–invarianten Metrik auf M folgt aus der Kompaktheit von H. Die Bedingung $H \subseteq G^\sigma$ liefert eine wohldefinierte Abbildung $\tilde{\sigma} : G/H \to G/H$, $gH \mapsto \sigma(g)H$. Der Fakt $\tilde{\sigma}^2 = \mathrm{Id}$ beweist, dass $\tilde{\sigma}$ ein Diffeomorphismus ist. Die Voraussetzung $(G^\sigma)_0 \subseteq H \subseteq G^\sigma$ wird zeigen, dass $\tilde{\sigma}$ eine geodätische Reflektion um den Punkt $p := eH$ ist. Offensichtlich gilt $\tilde{\sigma}(p) = p$. Wir betrachten jetzt das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_eG \arrow[r, "d\sigma_e"] \arrow[d, "d\pi_e"] & T_eG \arrow[d, "d\pi_e"] \\ T_pM \arrow[r, "d\tilde{\sigma}_p"] & T_pM \end{tikzcd}$$

Aus $\sigma^2 = \mathrm{Id}_G$ und $\tilde\sigma^2 = \mathrm{Id}$ folgt $(d\sigma)_e^2 = \mathrm{Id}_{T_eG}$ sowie $(d\tilde\sigma)_p^2 = \mathrm{Id}_{T_pM}$. Damit zerlegt sich $\mathfrak{g} = T_eG$ orthogonal in die Eigenräume $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ zu Eigenwerten ± 1. Nach Vorraussetzung ist die Lieunteralgebra von $(G^\sigma)_0$ und G^σ durch $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g} = T_eG$ gegeben, d.h. $\sigma_{|G^\sigma} = \mathrm{Id}_{G^\sigma}$ liefert $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_1$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_1 &= \{X \in \mathfrak{g} \mid (d\sigma)_e(X) = X\}\\ &\subseteq \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(\exp(tX)) = \exp(d\sigma_e(tX)) = \exp(tX),\ \forall t\}\\ &= \{X \in \mathfrak{g} \mid \ \exp(tX) \in G^\sigma,\ \forall t\} = \mathfrak{h},\end{aligned}$$

d.h. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}$. Das obige kommutative Diagramm zusammmen mit $\ker d\pi_e = \mathfrak{h}$ zeigen also $(d\tilde\sigma)_p = -\mathrm{Id}_{T_pM}$. $(d\tilde\sigma)_p : T_pM \to T_pM$ ist offensichtlich eine Isometrie des H–invarianten Produktes auf T_pM. Da die Metrik g_M G–invariant ist, sind die Linkstranslationen $L_a : M \to M$ Isometrien für alle $a \in G$, d.h. $\tilde\sigma \circ L_a = L_{\sigma(a)} \circ \tilde\sigma$ zeigt die Isometrieeigenschaft von $\tilde\sigma$:

$$(d\tilde\sigma)_{aH} \cdot (dL_a)_{eH} = (dL_{\sigma(a)})_{eH} \cdot (d\tilde\sigma)_{eH}.$$

Also ist $\tilde\sigma : M \to M$ eine geodätische Reflektion um p. Für einen beliebigen Punkt $x \in M$ wählen wir ein $a \in G$ mit $x = a \cdot p = \pi(a)$ und definieren $f := L_a \circ \tilde\sigma \circ L_{a^{-1}}$. f ist eine Isometrie mit $f(x) = L_a(\tilde\sigma(p)) = a \cdot p = x$ und

$$(df)_x = (dL_a)_p \cdot (d\tilde\sigma)_p \cdot (dL_{a^{-1}})_x = -(dL_a)_p \cdot (dL_{a^{-1}})_x = -\mathrm{Id}_{T_xM}.$$

Dies beweist: (M, g_M) ist ein symmetrischer Raum. □

4.3 Grobe Klassifikation symmetrischer Räume

Sei $\sigma : G \to G$ ein Liegruppenhomomorphismus mit $\sigma^2 = \mathrm{Id}$, dann ist $(d\sigma)_e : T_eG \to T_eG$ ein Liealgebrenhomomorphismus mit $(d\sigma)_e^2 = \mathrm{Id}_{T_eG}$:

$$[(d\sigma)_eX, (d\sigma)_eY] = (d\sigma)_e[X, Y].$$

In der Situation eines symmetrischen Raumes G/H ist die Lieunteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g} = T_eG$ genau der Eigenraum von $(d\sigma)_e$ zum Eigenwert $+1$. Sind also X, Y Eigenvektoren zum Eigenwert -1, folgt aus der obigen Relation: $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. Dies führt auf die charakterisierende Eigenschaft symmetrischer Räume $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$:

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}, \qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}, \qquad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{h}. \tag{4.2}$$

Umgekehrt sei $\mathfrak{g}$ eine reelle Liealgebra mit einer Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ derart, dass die Relationen in (4.2) gelten, dann definiert $s : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} \to \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, $(v, w) \mapsto (v, -w)$ einen involutiven Liealgebrenhomomorphismus, d.h. $s \neq \mathrm{Id}$ und $s^2 = \mathrm{Id}$. Sei G die einfach zusammenhängende Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$, dann induziert s eine Involution $\sigma : G \to G$ mit $s = (d\sigma)_e$. Wenn es dann noch eine kompakte Untergruppe $H \subseteq G$ mit Lieunteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ gibt, dann gilt $(G^\sigma)_0 \subseteq H \subseteq G^\sigma$, d.h. bis auf die Wahl einer G–invarianten Metrik ist G/H ein symmetrischer Raum. Die Klassifikation der einfach zusammenhängenden symmetrischen Räume beschränkt sich also im Wesentlichen auf die Klassifikation der *orthogonal symmetrischen Liealgebren* $(\mathfrak{g}, s)$ wobei $\mathfrak{g}$ eine reelle Liealgebra und $s : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ eine Involution derart ist, dass der Eigenraum $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ von s zum Eigenwert $+1$ eine Lieunteralgebra mit $(B_{\mathfrak{g}})_{|\mathfrak{h}} < 0$ ist (in diesem Fall gibt es eine kompakte Lieuntergruppe $H \subseteq G$). Durch folgenden Satz vereinfacht sich die Klassifikation weiter:

Satz 4.3.1 ([5])**.** *Sei $(\mathfrak{g}, s)$ eine orthogonal symmetrische Liealgebra, dann gilt*

$$(\mathfrak{g}, s) = (\mathfrak{g}_-, s_-) \oplus (\mathfrak{g}_0, s_0) \oplus (\mathfrak{g}_+, s_+)$$

mit orthogonal symmetrischen Liealgebren $(\mathfrak{g}_-, s_-)$, $(\mathfrak{g}_0, s_0)$ und $(\mathfrak{g}_+, s_+)$, so dass

1. *$(\mathfrak{g}_0, s_0)$ ist* abelsch*, d.h. der Eigenraum $\mathfrak{p}_0$ von s_0 zum Eigenwert -1 ist abelsch: $[\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0]_{\mathfrak{g}_0} = 0$.*

2. *$(\mathfrak{g}_+, s_+)$ ist vom* kompakten Typ*, d.h. die Killing–Form von $\mathfrak{g}_+$ ist negativ definit: $B_{\mathfrak{g}_+} < 0$.*

3. *$(\mathfrak{g}_-, s_-)$ ist vom* nicht kompakten Typ*, d.h. $\mathfrak{g}_-$ ist halbeinfach und für die Zerlegung $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{h}_- \oplus \mathfrak{p}_-$ in Eigenräume von s_- zu Eigenwerten ± 1 gilt: $B_{\mathfrak{g}_-} < 0$ auf $\mathfrak{h}_-$ sowie $B_{\mathfrak{g},-} > 0$ auf $\mathfrak{p}_-$.*

Durch die folgende Dualität wird sich das Problem der Klassifikation symmetrischer Räume auf die Klassifikation der orthogonal symmetrischen Liealgebren vom kompakten Typ reduzieren: Sei $(\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}, s)$ eine orthogonal symmetrische Liealgebra und $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ die Komplexifizierung von $\mathbb{C}$. Dann ist $\mathfrak{g}^\star := \mathfrak{h} \oplus \mathbb{i}\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ eine reelle Lieunteralgebra der komplexen Liealgebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ und $s^\star(h + \mathbb{i}x) := h - \mathbb{i}x$, $h \in \mathfrak{h}$ sowie $\mathbb{i}x \in \mathbb{i}\mathfrak{p}$, definiert eine Involution auf $\mathfrak{g}^\star$ derart, dass $(\mathfrak{g}^\star, s^\star)$ eine orthogonal symmetrische Liealgebra ist. $(\mathfrak{g}^\star, s^\star)$ heißt *das Dual* von $(\mathfrak{g}, s)$. Offensichtlich gilt $(\mathfrak{g}^{\star\star}, s^{\star\star}) \cong (\mathfrak{g}, s)$ und $\star$ ändert kompakten Typ in nicht kompakten Typ (bzw. nicht kompakten Typ in kompakten Typ).

Beispiel 4.3.2 (Übung)**.** *Wir betrachten $S^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$. Das Dual der (kompakten) orthogonal symmetrischen Liealgebra $\mathrm{so}(n+1) = \mathrm{so}(n) \oplus \mathfrak{p}$ ist isomorph zu*

$$\mathrm{so}(1, n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x^t \\ x & A \end{pmatrix} \middle| A \in \mathrm{so}(n), x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

mit Involution $s(A) = A$ für alle $A \in \mathrm{so}(n) \subseteq \mathrm{so}(1, n)$ und $s(x) = -x$ für $x \in \mathbb{R}^n \subseteq \mathrm{so}(1, n)$. Der einfach zusammenhängende symmetrische Raum für diese orthogonal symmetrische Liealgebra ist der reell hyperbolische Raum $\mathbb{R}H^n$. Dieses Beispiel verdeutlicht den Dualitätsbegriff: S^n besitzt konstant positive Schnittkrümmung und $\mathbb{R}H^n$ besitzt konstant negative Schnittkrümmung.

Die Klassifikation der abelschen orthogonal symmetrischen Liealgebren ist unnötig, da jeder assoziierte symmetrische Raum flach ist. Aufgrund der Dualität der kompakten und nicht kompakten orthogonal symmetrischen Liealgebren reichts es aus, die orthogonal symmetrischen Räume vom kompakten Typ zu klassifizieren. Die Summe kompakter orthogonal symmetrischer Liealgebren ist natürlich wieder eine orthogonal symmetrische Liealgebra, d.h. wir benötigen einen Irreduzibilitätsbegriff. Man bezeichnet $(\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}, s)$ als *irreduzibel*, wenn $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, $\mathfrak{h}$ keine Ideale $\neq \{0\}$ von $\mathfrak{g}$ enthält und die (Isotropie)–Darstellung der Liealgebra $\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_{|\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathrm{End}(\mathfrak{p})$ irreduzibel ist. Damit gibt es genau 2 Typen von kompakten irreduziblen orthogonal symmetrischen Liealgebren $(\mathfrak{g}, s)$ (cf. [5]):

Typ I: $\mathfrak{g}$ ist eine einfache Liealgebra mit Killing–Form $B_{\mathfrak{g}} < 0$ und s ist eine Involution auf $\mathfrak{g}$.

Typ II: $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}$ mit einfacher Liealgebra $\mathfrak{k}$ und $B_{\mathfrak{k}} < 0$. Die Involution auf $\mathfrak{g}$ ist durch $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben, d.h. für die Eigenräume gilt $\mathfrak{h} = \{(v, v) | v \in \mathfrak{k}\}$ und $\mathfrak{p} = \{(v, -v) | v \in \mathfrak{k}\}$.

Die Typ III und Typ IV symmetrischen Räume sind genau die nicht kompakten Dualräume zu Typ I bzw. Typ II. Die Typ II symmetrischen Räume werden bis auf Isometrie durch die einfachen kompakten Liegruppen mit biinvarianter Metrik gegeben. Aus den obigen Ausführungen folgt weiterhin: Die Typ I symmetrischen Räume sind genau die isotropie–irreduziblen homogenen Räume G/H mit einfacher kompakter Liegruppe G und normal homogener Metrik auf G/H, so dass

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{h}$$

mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ gilt ($\mathfrak{h}$ Liealgebra von H). Die Irreduzibilitätsbedingung an orthogonal symmetrische Liealgebren zeigt außerdem, dass die G–invariante Metrik auf einem Typ I–IV symmetrischen Raum bis auf Skalierung eindeutig ist. Insbesondere sind Typ I–IV symmetrische Räume isotropie–irreduzibel und Einstein. Eine Liste von irreduziblen symmetrischen Räumen findet man in [2, 5, 8], wobei Typ II im Wesentlichen aus dem Klassifikationstheorem 3.3.11 folgt. Für einen einfach zusammenhängenden kompakten symmetrischen Raum $(M = G/H, g_M)$ ist die Metrik g_M normal homogen mit positiver Ricci Krümmung und Schnittkrümmung (vgl. Theorem von O'Neill)

$$K(v, w) = \langle [v, w], [v, w] \rangle$$

mit $v, w \in T_pM$ und $\langle v, w \rangle = 0$, $|v| = |w| = 1$. Man beachte aber, dass für einen Typ III und Typ IV symmetrischen Raum G/H die Liegruppe G keine biinvariante Metrik trägt, d.h. diese symmetrischen Räume sind nicht normal homogen. Die Killing–Form einer halbeinfachen Liegruppe G induziert aber eine *biinvariante Semi–Riemannsche Metrik* auf G sowie eine Riemannsche Metrik auf G/H, so dass im symmetrischen Fall die Abbildung $G \to G/H$ eine Riemannsche Submersion wird. Die Signatur dieser Semi–Metrik auf G ist $\dim G - 2 \dim H$. Man beachte auch, dass für G/H mit orthogonal symmetrischer Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ die folgende Abbildung eine Bijektion ist (vgl. Bemerkung 3.5.4):

$$\left\{ \begin{matrix} \text{symmetrische} \\ \text{Metriken auf } G/H \end{matrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{matrix} H - \text{invariante} \\ \text{Skalarprodukte auf } T_pM \end{matrix} \right\}, \ g \mapsto g_{|T_pM}$$

Satz 4.3.3. *Sei $(M = G/H, g)$ symmetrisch und $p = eH \in M$, dann ist die Krümmung in p gegeben durch*

$$R_{u,v}w = -[[u,v],w]$$

mit $u, v, w \in T_pM \cong \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$. Für die Ricci Krümmung gilt

$$\mathrm{Ric}(u,v) = -\frac{1}{2}B_{\mathfrak{g}}(u,v).$$

Beweis. (M, g) zerlegt sich lokal in ein Riemannsches Produkt von irreduziblen symmetrischen Räumen (M_i, g_i), und da die Riemannsche und die Ricci Krümmung lokale Objekte sind, welche sich unter Riemannschen Produkten wie erwartet verhalten, reicht es aus, die Behauptung für irreduzible symmetrische Räume zu zeigen. Sei also $(M = G/H, g)$ ein irreduzibler symmetrischer Raum, d.h. die Isotropie–Darstellung $\chi : H \to \mathrm{Aut}(T_pM)$ ist irreduzibel bzw. G/H ist ein symmetrischer Raum vom Typ I–IV oder (M, g) ist 1–dimensional und flach. Die Schnittkrümmung für Typ I und Typ II symmetrische Räume sind bereits bekannt, also betrachte nur den Fall Typ III und Typ IV. Die Krümmung $R_{u,v}w$ hängt nicht von der Skalierung der Metrik ab, d.h. wir versehen G mit der Semi–Metrik $\bar{g}$ der Killing Form von $\mathfrak{g}$ und betrachten die Riemannsche Submersion $\pi : (G, \bar{g}) \to (G/H, g)$. Der Zusammenhang und die Krümmung auf G sind wie im biinvarianten Fall gegeben, so dass O'Neill's Theorem und $[u,v]_{\mathfrak{p}} = 0$ für alle $u, v \in \mathfrak{p}$ die Schnittkrümmung bestimmen:

$$K(u,v) = \bar{g}([u,v],[u,v]) = \bar{g}([[u,v],u],v).$$

Man beachte hier jedoch $\bar{g} < 0$ auf $\mathfrak{h}$ und $\bar{g} > 0$ auf $\mathfrak{p}$, d.h. im Typ III und Typ IV Fall gilt $K \leq 0$. Nach Polarisation liefert die Schnittkrümmung den Riemannschen Krümmungstensor:

$$R_{u,v}w = -[[u,v],w].$$

Damit erhalten wir die Ricci Krümmung:

$$\mathrm{Ric}(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \bar{g}(R_{e_i,u}v, e_i) = -\sum_{i=1}^{n} \bar{g}\,\langle \mathrm{ad}_v \mathrm{ad}_u(e_i), e_i)\rangle$$

für eine ON–Basis $e_1, \ldots, e_n \in T_pM$. Für $u \in \mathfrak{p}$ gilt $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{ad}_u \\ \mathrm{ad}_u & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p})$, d.h.

$$\mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_v \mathrm{ad}_u)_{|\mathfrak{p}}\big) = \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_v \mathrm{ad}_u)_{|\mathfrak{h}}\big) = \frac{1}{2}B_{\mathfrak{g}}$$

liefert die Behauptung $\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2}(B_{\mathfrak{g}})_{|\mathfrak{p}}$. □

Bemerkung 4.3.4. Es gilt folgendes zu beachten: Die Lieklammer im Satz wird durch die Liegruppe G bestimmt. Sei H eine einfache kompakte Liegruppe, dann wird H durch $G/\Delta H$ als Typ II symmetrischer Raum dargestellt, wobei $G = H \times H$ und $\Delta H = \{(h,h)|\ h \in H\}$. Dies erklärt die unterschiedlichen Vorfaktoren in Satz 3.2.2 und Satz 4.3.3.

Literaturverzeichnis

[1] A. Arvanitoyeorgos. *An introduction to Lie groups and the geometry of homogeneous spaces*, volume 22 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. Translated from the 1999 Greek original and revised by the author.

[2] A. L. Besse. *Einstein manifolds*, volume 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[3] T. Bröcker and T. tom Dieck. *Representations of compact Lie groups*, volume 98 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[4] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[5] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, volume 34 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Corrected reprint of the 1978 original.

[6] M. Mimura and H. Toda. *Topology of Lie groups. I, II*, volume 91 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. Translated from the 1978 Japanese edition by the authors.

[7] B. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.

[8] S. Salamon. *Riemannian geometry and holonomy groups*, volume 201 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1989.

[9] E. H. Spanier. *Algebraic topology*. Springer-Verlag, New York, 1981. Corrected reprint.

[10] J. A. Wolf. *Spaces of constant curvature*. Publish or Perish Inc., Houston, TX, fifth edition, 1984.