Lösungen zum Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1

a) Man rechne

$$\begin{aligned} &x^3 - 20x = 0 \\ \Leftrightarrow &x = 0 \text{ oder } x^2 - 20 = 0 \\ \Leftrightarrow &x \in \{-2\sqrt{5}, 0, 2\sqrt{5}\} \end{aligned}$$

b) Die Iterationsvorschrift ist

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 20x}{3x^2 - 20} = \frac{2x^3}{3x^2 - 20}$$

Für den Startwert $x_0 = 2$ ergibt sich

$$\begin{aligned} F(2) &= \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 4 - 20} = \frac{16}{-8} = -2 \\ F(-2) &= \frac{2 \cdot (-8)}{3 \cdot 4 - 20} = \frac{-16}{-8} = 2 \end{aligned}$$

Die Iterationsfolge pendelt also zwischen -2 und 2 ohne sich je einer Nullstelle zu nähern.
Für den Startwert $x_0 = 4$ ist hingegen alles in Ordnung:

```
(%i1) F(x):= 2*x^3/(3*x^2-20);

                                              3
                                           2 x
(%o1)                            F(x) := ---------
                                             2
                                          3 x  - 20
(%i2) F(4.0);

(%o2)                            4.571428571428571
(%i3) F(%);

(%o3)                            4.475279978148047
(%i4) F(%);

(%o4)                            4.472139265059941
(%i5) F(%);

(%o5)                            4.472135955003254
(%i9) sqrt(20.0);

(%o9)                            4.47213595499958
```

Aufgabe 2

(a)

(b) Es ist

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$$

Daher ist der tanh streng monoton steigend.

(c) Wir bestimmen die Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} \tanh x = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$$

Der tanh ist umkehrbar, da er streng monoton steigend ist und sein Bildbereich ist $(-1, 1)$. Die Ableitung der Umkehrfunktion artanh ist

$$\operatorname{artanh}'(y) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{artanh} y)} = \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{artanh} y)} = \frac{1}{1 - y^2}$$

Aufgabe 3

Wähle x als Wannenhöhe. Dann ist

$$V(x) = x(23 - 2x)(14 - 2x) = 4x^3 - 74x^2 + 322x$$

Die Ableitung ist

$$V'(x) = 12x^2 - 148x + 322$$

Die Nullstellen von $V'(x)$ sind

$$x_1 = \frac{\sqrt{403} + 37}{6} \approx 9,512477 \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{403} - 37}{6} \approx 2,820857$$

Einsetzen in die zweite Ableitung ergibt ein Maximum bei x_2 und ein Minimum bei x_1. Daher sind die optimalen Kantenlängen etwa 2,82 cm, 17,36 cm und 8,36cm.

Aufgabe 4

a) Nach Definition sind P_0 ein Polynom 0. Grades und P_1 ein Polynom 1. Grades. Induktiv zeigen wir die Aussage: Nach der Induktionsvorraussetzung ist $(2n+1)xP_n(x)$ ein Polynom $(n+1)$-ten Grades und $nP_{n-1}(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades. Die Differenz P_{n+1} ist wiederum ein Polynom $(n+1)$-ten Grades.

b) Man berechnet

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

c) Nicht so einfach. Man braucht noch andere Eigenschaften als die Rekursionsformel, um die Legendre-Differentialgleichung zu erstellen. Ich bitte um Entschuldigung. Mit der Formel von Rodrigues $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$ läßt sich die Differentialgleichung ableiten. Diese wird auf dem neuen Übungsblatt vorgestellt.