Musterlösung zur Probeklausur zur Vorlesung Elementargeometrie

Aufgabe 1

a)

Parallelprojektionen geben uns bijektionen zwischen Geraden. Vergleiche Beweis zu Satz 1.4 im Skript.

b)

Vergleiche Übungsblatt 1, Aufgabe 3b.

Die Menge der Punkte sei $P = \mathbb{F}_3^2 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \right\}$.

Eine affine Ebene besitzt n^2 Punkte, in unserem Fall gilt also $n = 3$. Damit ergibt sich für die Anzahl der Geraden $n^2 + n = 12$. Definition der Geraden: $G_{a,b} = \big\{ a + b \cdot \mathbb{F}_3$ mit a, b $\in \mathbb{F}_3$ und $b \neq 0 \big\}$. Damit sind die Geraden:

$$
\begin{array}{cccc}
\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \right\}, & \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \right\}, & \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \right\}, & \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right\} \\
\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right\}, & \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\}, & \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \right\}, & \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \right\} \\
\left\{ \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \right\}, & \left\{ \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \right\}, & \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \right\}, & \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \right\}
\end{array}
$$

Ein Punkt $p \in P$ liegt auf der Geraden $G_{a,b}$, falls $p \in G_{a,b}$.

Äquivalenzklasse paralleler Geraden: zwei Geraden $G_{a,b}$, $G_{c,d}$ sind parallel, falls b und d linear abhängig sind. Die Äquivalenzklassen sind dann genau die vier Spalten der gegebenen Liste von allen Geraden.

c)

Zentralprojektionen geben uns Bijektionen zwischen Geraden. Vergleiche Übungsblatt 5, Aufgabe 1b.

Aufgabe 2

a)

Die hyperbolische Ebene ist eine Inzidenzgeometrie, die (P) nicht erfüllt. Dabei ist $H = \{z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1\}$. Die Geraden sind Kreise, die den Einheitskreis senkrecht schneiden, geschnitten mit H und die euklidische Geraden, die durch den Ursprung gehen, ebenfalls geschnitten mit H. Die Inzidenz ist mengenmäßiges Enthaltensein.

b)

Die projektive Ebene ist eine Inzidenzgeometrie, die (P), aber nicht (PE) erfüllt. Alle Geraden schneiden sich hier im Unendlichen, weshalb es keine Parallelen gibt.

c)

Nein, denn (I2) ist nicht erfüllt. Betrachtet man den Nord- bzw. Südpol der sphärischen Geometrie, so gibt es durch diese beiden Punkte unendlich viele Großkreise, also auch unendlich viele Geraden.

d)

Wir brauchen eine endliche Geometrie. Ein Beispiel wäre die Fano-Ebene (Beispiel 1.35), diese erfüllt (A3) nicht, denn jede Gerade enthält nur 3 Punkte. Wir finden also nicht zu allen Punkten p und q der Fano-Ebene einen Punkt r mit $p * q * r$.

e)

Wir brauchen eine Geometrie mit Dimension größer 2 (kleiner geht nicht wegen (I3)). Ein Beispiel ist Euklidischer Raum $\mathbb{R}^3$. Aufgrund der Existenz windschiefer Geraden ist (A5) nicht erfüllt.

Aufgabe 3

$p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})^T$, $q = (-\frac{1}{3}, 0)^T$
p und q sind linear unabhängig und liegen nach Lemma 1.21 auf dem Kreis

$$k = \{\sqrt{|w|^2 - 1}\begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix} + w \quad \text{mit} \quad t \in [0, 2\pi)\} \;.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
1 + |q|^2 &= 2q_1w_1 + 2q_2w_2 \\
1 + \frac{1}{3} &= 2(-\frac{1}{3}w_1) \\
\frac{4}{3} &= -\frac{2}{3}w_1 \\
w_1 &= -2
\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}
1 + |p|^2 &= 2p_1w_1 + 2p_2w_2 \\
1 + \frac{\sqrt{13}}{6} &= 2(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{3}w_2) \\
w_2 &= \frac{18 + \sqrt{13}}{4}
\end{aligned}$$

Die hyperbolische Gerade g ist also $g = k \cap P$, wobei $w = (w_1, w_2)^T$, wie oben berechnet.

b)

Die Punkte $p = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)^T$ und $q = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)^T$ sind linear abhängig und die hyperbolische Gerade ist $g = t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cap P$.

Eine Drehung um die $0 \in \mathbb{C}$ für ein Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ ist eine Isometrie der Poincarésche Kreiscscheibe. Dass gilt, weil so eine Drehung durch $\varphi_A(z) = e^{\alpha i} z$ gegeben wird, mit der zugehörigen Matrix $A = \begin{pmatrix} e^{\alpha i/2} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha i/2} \end{pmatrix}$, die offensichtlich in $\mathrm{SU}(1,1)$ ist (vgl. Aufgabe 3 auf dem Übungsblatt 4).

Sei also φ_A die Drehung, die die gegebene hyperbolische Gerade auf die x-Axe abbildet, so dass es gilt $\varphi_A(p) = (|p|, 0) = -\varphi_A(q)$. Es gilt dann

$$d(p,q) = \ln\left(\frac{(|p|+1)(-|p|-1)}{(-|p|+1)(|p|-1)}\right) = \ln\left(\frac{(\sqrt{13}+6)^2}{(\sqrt{13}-6)^2}\right).$$

c)

Wir benutzen Satz 1.31.
Die gesuchte Matrix ist gegeben durch $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Aus $\Phi\binom{0}{0} = w = \frac{b}{\bar{a}} = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{3}$ folgt

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{1-|w|^2}} \\ b &= \frac{w}{\sqrt{1-|w|^2}} \end{aligned}.$$

Mit $|w|^2 = \frac{13}{36}$ erhalten wir $a = \frac{6}{\sqrt{23}}$ und $b = (\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{3}) \cdot \frac{6}{\sqrt{23}}$ und damit

$$A = \frac{6}{\sqrt{23}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

$q(x,y) = (x,y)A\binom{x}{y} + b^T\binom{x}{y} + c$ mit $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $b = \binom{3}{-1}$, $c = 2$.
Die Eigenwerte und -vektoren der Matrix A sind:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 2\\
w_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\\
\lambda_2 &= 0\\
w_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Da b nicht im Bild von A liegt, handelt es sich bei der Lösungsmenge um eine Parabel.
Für die Bewegung S ergibt sich:

$$S = S^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} .$$

Den Verschiebungsvektor $v = \binom{v_1}{v_2}$ erhalten wir mit den Gleichungen

$$\begin{aligned}
2\lambda_1 v_1 &= (Sb)^T_1\\
c - (Sb)^T v + \lambda_1 v_1^2 &= 0
\end{aligned}$$

(siehe Skript S.40), also

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\\
v_2 &= \frac{3}{16}\sqrt{2} .
\end{aligned}$$

Die Normalform der Parabel lautet:

$$\begin{aligned}
0 = q(x,y) &= \tilde{q}(\tilde{x},\tilde{y}) = \lambda_1\tilde{x}^2 + (Sb)^T_2\tilde{y}\\
\Rightarrow 0 &= 2\tilde{x}^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\tilde{y} .
\end{aligned}$$

Der Brennpunkt $(0,f) = (0,-2\sqrt{2})$ ergibt sich aus $\tilde{y} = \frac{1}{4f}\tilde{x}^2$ und $\tilde{y} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}^2$.
In $\binom{x}{y}$-Koordinaten:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = S^T\cdot\left(\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} - v\right) = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}-39\\ 31\end{pmatrix} .$$

Die Leitgerade erhält man als $\tilde{g} = \binom{0}{2\sqrt{2}} + t\cdot\binom{1}{0}$. In $\binom{x}{y}$-Koordinaten ergibt sich für den Richtungsvektor $\sqrt{2}\cdot S^T\cdot\binom{1}{0} = \binom{1}{1}$ und für den Stützpunkt $q = S^T\cdot\left(\binom{0}{2\sqrt{2}} - v\right) = \frac{1}{16}\binom{25}{-33}$. Insgesamt ist die Leitgerade also gegeben durch $g = \frac{1}{16}\binom{25}{-33} + t\cdot\binom{1}{1}$.

Aufgabe 5

$\Rightarrow$

Sei P konvex. Dann gibt es Normalenvektoren n^i zu $E^i = X_-^i \cap X_+^i$, so dass $P = \cap_{i=1}^m X_-^i$. wobei $X_\pm = \{w \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } < w - v, n >_E \geq \ bzw. \ \leq 0\}$ und v der Stütz- und n der Normalenvektor der Ebene ist. Da jede Ebene E^i den $\mathbb{R}^3$ in die beiden Halbräume X teilt, und die w in nur jeweils liegen, folgt die Aussage direkt aus der Definition.

$\Leftarrow$

Ganz P liege auf der gleichen Seite von E^i für alle i.

Setze $E_i := X_-^i \cap X_+^i$ wie oben. Sei $\tilde{n}^i$ der Normalenvektor der Ebene E^i.

Es gilt: $w \in X_-^i \ \forall w \in P$ oder $w \in X_+^i \ \forall w \in P$.

Falls $w \in X_+^i$, wähle einen neuen Normalenvektor n^i, so dass $n^i = -\tilde{n}^i$. Dann gilt $w \in X_-^i \ \forall w \in P$ und alle i. Insgesamt ergibt sich $P = \cap_{i=1}^m X_-^i$, also ist P konvex.