

Zweite Übungsblatt zur Vorlesung “Elementargeometrie”

Dr. Blaž Mramor

9. Mai 2014

Bitte schreiben Sie Ihre Name sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.

Aufgabe 1. Sphärische Geometrie:

Zeigen Sie in der sphärischen Geometrie, dass es für zwei Punkte p, q auf \mathbb{S}^2 mit $p \neq \pm q$ genau eine Gerade durch p und q gibt. Beschreiben Sie die Ebene durch den Ursprung im \mathbb{R}^3 , die diese Gerade enthält.

Aufgabe 2. Teilung der Ebene:

Gegeben sei eine Inzidenzgeometrie \mathcal{I} mit Anordnung $*$, so dass die Anordnungsaxiome gelten. Sei g eine Gerade in \mathcal{I} . Zeigen Sie, dass die Bedingung “ p liegt auf der gleichen Seite von g wie q ” eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Punkte, die nicht auf g liegen, definiert.

Aufgabe 3. Kongruenz von Nebenwinkeln:

Gegeben sei eine Inzidenzgeometrie $\mathcal{I} = (P, G, I, \cong_S, \cong_W)$ mit Anordnung und Kongruenz von Winkel und Strecken, so dass die Axiome (A1)–(A5) und (K1)–(K6) gelten. Zeigen Sie die Kongruenz von Nebenwinkeln (Satz 1.5 und Korollar 1.6 der Vorlesung).

Aufgabe 4. Kongruenz von Strecken in einer kartesischen Ebene:

Sei \mathbb{K} ein angeordneter Körper (das ist ein Körper zusammen mit einer totalen Ordnung “ \leq ”, die mit Addition und Multiplikation verträglich ist) und sei $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ die kartesische Ebene über dem Körper. Dann erfüllt $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ die Inzidenzaxiome und die Anordnungsaxiome (was Sie nicht zeigen müssen). Für zwei Punkte $p = (p_1, p_2)$ und $q = (q_1, q_2)$ definieren wir den Abstand $d^2(p, q)$ mit

$$d^2(p, q) := (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2.$$

Zwei Strecken \overline{pq} und \overline{rs} heißen kongruent, wenn $d^2(p, q) = d^2(r, s)$.

Zeigen Sie für diese Definition von Kongruenz der Strecken auf $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$, dass

- sie Axiom (K2) erfüllt,
- sie Axiom (K1) genau dann erfüllt, wenn für jedes Element $a \in \mathbb{K}$ das Element $(1+a^2) \in \mathbb{K}$ eine Wurzel im Körper \mathbb{K} besitzt.

Abgabe des Übungsblattes am 23. Mai 2014 vor Beginn der Vorlesung.