Drittes Übungsblatt zur Vorlesung "Elementargeometrie"

Dr. Blaž Mramor **23. Mai 2014**

Bitte schreiben Sie Ihren Name sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.

Aufgabe 1. Archimedesche und Dedekindsche Axiom:
Sei $(P, G, I, *, \cong_S)$ eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation $*$, in der die Axiome (A1)–(A5), (K1)–(K3) und das Dedekindsche Axiom (V2) gelten. Zeigen Sie, dass dann auch das Archimedesche Axiom (V1) folgt.
Hinweis: für eine Gerade g, und zwei Punkte p, q, die auf g liegen, betrachtet man die Menge der Punkte auf g, die für p, q nicht das Archimedesche Axiom erfüllen. Um zu zeigen, dass diese Menge leer ist, kann man die Tatsache, dass alle Punkte auf einer Geraden angeordnet sind, benutzen.

Aufgabe 2. Strecken im Kartesischen Model:
Zeigen Sie, dass im Kartesischen Modell der Euklidischen Geometrie zwei Strecken genau dann kongruent sind, wenn sie gleich lang sind.

Aufgabe 3. Euklidische Bewegungsgruppe:
Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}(V, \langle ., . \rangle)$ eine Untergruppe der Automorphismengruppe ist:

$$\mathrm{Aut}(V) = \{f : V \to V \text{ linear und invertierbar}\}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Euklidische Bewegungsgruppe $\mathrm{E}(V, \langle ., . \rangle)$ eine Gruppe bzgl. Komposition von Abbildungen ist.

Aufgabe 4. Abstand im Poincaréschen Kreisscheibenmodell :

Zeigen Sie, dass im Poincaréschen Kreisscheibenmodell die Abstandsfunktion $d(., .)$ folgende Bedingungen erfüllt:

a) $d(p, q) \geq 0$ mit $d(p, q) = 0$ gdw. $p = q$.

b) $d(p, q) = d(q, p)$.

c) $d(p, q) = d(p, v) + d(v, q)$ wenn $p * v * q$.

d) berechnen Sie für $0 < r < 1$ die Abstand $\rho := d((0, 0)^T, (r, 0)^T)$, und zeigen Sie, dass gilt

$$r = \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) .$$

Abgabe des Übungsblatts am 6. Juni 2014 vor Beginn der Vorlesung.