Viertes Übungsblatt zur Vorlesung “Elementargeometrie”

Dr. Blaž Mramor **6. Juni 2014**

Bitte schreiben Sie Ihren Name sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.

Aufgabe 1. Hyperbolischer Abstand: *(4 Punkte)*
Berechnen Sie den hyperbolischen Abstand der Punkte

a) $p = \frac{i}{2}$ und $q = -\frac{i}{3}$.

b) $p = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ und $q = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$.

Aufgabe 2. Möbiustransformationen: *(6 Punkte + 4 extra Punkte)*
Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ ist die Möbiustransformation (zu A) definiert als die Abbildung $\varphi_A : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit

$$\varphi_A(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{für } \; z \neq -d/c, z \neq \infty \; , \\ \infty & \text{falls } \; z = -d/c, \; \text{oder } z = \infty \text{ und } c = 0 \; , \\ \frac{a}{c} & \text{falls } \; z = \infty \text{ und } c \neq 0 \; . \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\varphi_{E_2} = id$ und $\varphi_{A \cdot B} = \varphi_A \circ \varphi_B$ für alle $A, B \in GL_2(\mathbb{C})$.

b) Wir definieren die elementare Möbiustransformationen als die Inversion ($z \mapsto z^{-1}$), Drehstreckungen mit a ($z \mapsto az, a \in \mathbb{C}$) und Translationen für b ($z \mapsto z + b, b \in \mathbb{C}$). Zeigen Sie, dass sich jede Möbiustransformation als Komposition von elementaren Möbiustransformationen darstellen lässt.

Hinweis: Betrachten Sie für $c \neq 0$ die Komposition von $z \mapsto c^2 z + cd$, einer Inversion und $z \mapsto -(ad - bc)z + a/c$.

c) Zeigen Sie, dass es für paarweise verschiedene Punkten $p, q, r \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $p', q', r' \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine eindeutige Möbiustransformation φ gibt, so dass $\varphi(p) = p'$, $\varphi(q) = q'$ und $\varphi(r) = r'$ gilt.

Hinweis: Es genügt den Fall $p' = 0$, $q' = 1$ und $r' = \infty$ zu behandeln. Warum?

d)* Zeigen Sie, dass eine Möbiustransformation verallgemeinerte Kreise (d.h. Kreise und Geraden) auf verallgemeinerte Kreise abbildet.

Hinweis: Ein verallgemeinerter Kreis ist gegeben durch die Lösungsmenge von

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0,$$

wobei $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{C}$.

e)* Zeigen Sie, dass das Doppelverhältniss invariant unter Möbiustransformationen ist. Weiterhin, zeigen Sie für das Doppelverhältniss von $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, dass $DV(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn die Punkte z_1, z_2, z_3, z_4 auf einem verallgemeinerten Kreis liegen.

Aufgabe 3. Isometrien der Poincaréschen Kreisscheibe: *(6 Punkte)*
Zeigen Sie:

a) Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ mit $\det A = 1$ gilt

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overline{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn es komplexe Zahlen a, b mit $|a|^2 - |b|^2 = 1$ und $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right)$ gibt.

b) $\mathrm{SU}(1,1)$ ist bezüglich Matrixmultiplikation eine nicht kommutative Gruppe.

c) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SU}(1,1)$ und $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Dann ist

$$\varphi_A : D \to D, \ z \mapsto \frac{a \cdot z + b}{\overline{b} \cdot z + \overline{a}}$$

wohldefiniert mit $|\varphi_A(z)| = 1$ genau dann, wenn $|z| = 1$.

Abgabe des Übungsblatts am 27. Juni 2014 vor Beginn der Vorlesung.