Letztes Übungsblatt zur Vorlesung "Elementargeometrie"

Dr. Blaž Mramor **11. Juli 2014**

Bitte schreiben Sie Ihren Name sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.

Aufgabe 1. Kegelschnitte 1:
Gegeben sei

$$0 = q(x, y) = 2x^2 + 2\sqrt{2} \cdot xy + 3y^2 + b \cdot x + c.$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmengen $\{(x, y) | q(x, y) = 0\}$ für $b = 0$ und $c \in \{-1, 0, 1\}$. Wo liegen eventuelle Brennpunkte in den (x, y) Koordinaten?

b) Sei $c = 0$ und $b = -1$. Bringen Sie die Gleichung $q(x, y) = 0$ in eine Normalform und entscheiden Sie, welche Lösungsmenge vorliegt und wo eventuelle Brennpunkte liegen.

Aufgabe 2. Kegelschnitte 2:
Bestimmen Sie den Typ und Brennpunkt(e) des Kegelschnittes

$$0 = q(x, y) = -x^2 - y^2 + 6xy + 2x - y - \frac{1}{2}$$

durch Lösen der folgenden Teilaufagben (vgl. auch Vorlesung):

(a) Schreiben Sie die Gleichung in Matrixnotation und berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 der zugehörigen Matrix A.

(b) Bestimmen Sie eine orthonormierte Eigenbasis $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ von A, und zeigen Sie: es gilt $S := (v_1, v_2) \in \mathrm{O}(2)$ und SAS^t ist eine Diagonalmatrix bestehend aus den Eigenwerten von A.

(c) Berechnen Sie einen Translationsvektor $v \in \mathbb{R}^2$, so dass in den neuen Koordinaten $\left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{smallmatrix}\right) := S \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + v$ die Gleichung

$$0 = q(x, y) = \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 - \frac{9}{32}$$

gilt.

(d) Von welchem Typ ist der Kegelschnitt $0 = q(x, y)$? Wo sind die Brennpunkte in den alten Koordinaten x, y?

Bitte wenden!

Aufgabe 3. Characterisierung von Kreisen:
Sei

$$0 = q(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c$$

eine allgemeine Gleichung 2. Grades im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge $0 = q(x,y)$ genau dann einen Kreis definiert, wenn $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22}$ und

$$b_1^2 + b_2^2 > 4a_{11}c$$

gilt (*Hinweis: Kreis ist eine spezielle Ellipse*). Wo befindet sich in diesem Fall der Mittelpunkt des Kreises.

Aufgabe 4. Gleichung zweiten Grades in drei Variablen:
Bestimmen Sie den geometrischen Typ der Lösungsmenge der Gleichung

$$3x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 18 = 0,$$

analog zu dem zwei-dimensionalen Fall. Schreiben Sie dazu die Gleichung in Matrixnotation und berechnen Sie die Eigenwerte der zugehörigen Matrix A. Weiterhin bestimmen Sie eine Bewegung $E(3) = (S, v)$ die die Gleichung in Normalform bringt. Dabei ist $S \in O(3)$, die orthogonale Matrix die durch Eigenvektoren von A erzeugt wird, und $v \in \mathbb{R}^3$ die zugehörige Translation. Überzeugen Sie sich, dass $SAS^T = D$ die Diagonalmatrix bestehend aus den Eigenwerten von A ist.

Abgabe des Übungsblatts am 25. Juli 2014 vor Beginn der Vorlesung.