Lösungen zum letzten Übungsblatt zur Elementargeometrie

Dr. Blaž Mramor **29. Juli 2014**

Aufgabe 1. Kegelschnitte 1:
Gegeben sei

$$0 = q(x,y) = 2x^2 + 2\sqrt{2} \cdot xy + 3y^2 + b \cdot x + c.$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmengen $\{(x,y)|q(x,y)=0\}$ für $b=0$ und $c \in \{-1,0,1\}$. Wo liegen eventuelle Brennpunkte in den (x,y) Koordinaten?

b) Sei $c=0$ und $b=-1$. Bringen Sie die Gleichung $q(x,y)=0$ in eine Normalform und entscheiden Sie, welche Lösungsmenge vorliegt und wo eventuelle Brennpunkte liegen.

Lösung:

a) Die Gleichung in Matrixform: $(x,y)A(x,y)^T + c = 0$, wo $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$.

Wir finden die Eigenwerte als Nullstellen von $\det(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$, also $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 1$, mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = (1, \sqrt{2})$ und $v_2 = (\sqrt{2}, -1)$. Das ergibt die Transformationsmatrizen $S = S^T = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$, so dass $A = S^T D S$ mit $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ gilt es

$$0 = q(x,y) = (x,y)A(x,y)^T + c = (\tilde{x},\tilde{y})D(\tilde{x},\tilde{y})^T + c = 4\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + c = \tilde{q}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0.$$

Für $c=1$ ist die Lösungsmenge $C = \{(x,y) \mid q(x,y) = 0\}$ dieser Gleichung leer ($C = \emptyset$) für $c=0$ ist die Lösungsmenge von $\tilde{q}(\tilde{x},\tilde{y})$ gleich dem Punkt $\tilde{x} = \tilde{y} = 0$ und daher $C = \{(0,0)\}$. Für $c=-1$ bekommen wir eine Ellipse $\tilde{y}^2 + \frac{\tilde{x}^2}{1/4} = 1$, mit $\tilde{y}$-Achse als Hauptachse und Excentrizität $f = \sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3}/2$ und daher mit Brennpunkte

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

b) Die Matrizen A, D, S, S^T bleiben wie im Teil a). Die Transformation ist gegeben durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S^T \left(\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} - v \right)$ und wir erhalten wie auf Seite 40 der Skript

$$\begin{aligned} 0 =& q(x,y) = (x,y)A(x,y)^T + (-1,0) \cdot (x,y)^T = \\ =& 4\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (-1/\sqrt{3} - 8v_1)\tilde{x} + (-\sqrt{2}/\sqrt{3} - 2v_2)\tilde{y} + v_1/\sqrt{3} + v_2\sqrt{2}/\sqrt{3} + 4v_1^2 + v_2^2 =\cdot \\ =& \tilde{q}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0. \end{aligned}$$

Für $v_1 = -\dfrac{1}{8\sqrt{3}}$ und $v_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ fällt der lineare Term weg und wir bekommen

$$\tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 4\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 1/24 - 1/3 + 1/48 + 1/6 = 4\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \frac{3}{16}.$$

Die Lösungsmenge ist dadurch eine Ellipse, gegeben durch $\dfrac{\tilde{x}^2}{3/64} + \dfrac{\tilde{y}^2}{3/16} = 1$, mit $\tilde{y}$-Achse als Hauptache (weil $3/64 < 3/16$) und Exzentrizität $f = 3/8$. Die Brennpunkte in $(\tilde{x}, \tilde{y})$ Koordinaten sind dann gegeben durch $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = (0, 3/8)$ und $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) = (0, -3/8)$ und in (x, y) Koordinaten durch

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = S^T \left(\begin{pmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{8\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right) \quad \text{also}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sqrt{6} - 3)/8 \\ (\sqrt{2} - \sqrt{3})/8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\sqrt{6} - 3)/8 \\ (\sqrt{2} + \sqrt{3})/8 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2. Kegelschnitte 2:
Bestimmen Sie den Typ und Brennpunkt(e) des Kegelschnittes

$$0 = q(x, y) = -x^2 - y^2 + 6xy + 2x - y - \frac{1}{2}$$

durch Lösen der folgenden Teilaufagben (vgl. auch Vorlesung):

a) Schreiben Sie die Gleichung in Matrixnotation und berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 der zugehörigen Matrix A.

b) Bestimmen Sie eine orthonormierte Eigenbasis $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ von A, und zeigen Sie: es gilt $S := (v_1, v_2) \in \mathrm{O}(2)$ und SAS^t ist eine Diagonalmatrix bestehend aus den Eigenwerten von A.

c) Berechnen Sie einen Translationsvektor $v \in \mathbb{R}^2$, so dass in den neuen Koordinaten $\binom{\tilde{x}}{\tilde{y}} := S\binom{x}{y} + v$ die Gleichung

$$0 = q(x, y) = \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 - \frac{9}{32}$$

gilt.

d) Von welchem Typ ist der Kegelschnitt $0 = q(x, y)$? Wo sind die Brennpunkte in den alten Koordinaten x, y?

Lösung:

a) Die Gleichung in Matrixform:

$$0 = q(x, y) = (x, y)\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (2, -1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\,.$$

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -4$.

b) Zum Eigenwert λ_1 gehört der normierte Eigenvektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und zum Wert λ_2 der Eigenvektor $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, die zusammen $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ durch $S^T = (v_1, v_2)$ erzeugen. Es gilt $S^T S = SS^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}$ und

$$SAS^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = D.$$

c) Sei $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v$, so dass aus $A = S^T DS$ folgt

$$(\tilde{x}, \tilde{y})D\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = (x, y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2v^T DS\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v^T Dv.$$

Der lineare Term in der Gleichung $\tilde{q}(\tilde{x},\tilde{y}) = q(x,y)$ verschwindet, falls $2v^T DS = (2,-1)$, also falls $(4v_1, -8v_2) = 1/\sqrt{2}(1,3)$. Es folgt also für $v^T := \frac{1}{\sqrt{2}}(1/4, -3/8)$, dass

$$2\tilde{x}^2 - 4\tilde{y}^2 - \frac{9}{32} = (\tilde{x},\tilde{y})D\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} - \frac{9}{32} = (x,y)A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + (2,-1)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + v^T Dv - \frac{9}{32}$$

und weil $v^T Dv - \frac{9}{32} = \frac{1}{16} - \frac{9}{32} - \frac{9}{32} = -\frac{1}{2}$ haben wir unsere gesuchte Gleichung $\tilde{q}(\tilde{x},\tilde{y}) = q(x,y)$ gefunden.

d) Wir bringen $\tilde{q}(\tilde{x},\tilde{y})$ in Standardform $\frac{\tilde{x}^2}{9/64} - \frac{\tilde{y}^2}{9/128} = 1$ und erhalten eine Hyperbel. Wir berechnen die Exzentrizität $f = \sqrt{27/128}$ durch $f^2 = 9/128 - 9/64$. Die Brennpunkte in $(\tilde{x},\tilde{y})$-Koordinaten sind dann gegeben durch $\tilde{p}_1 = (-\sqrt{27/128}, 0)$ und $\tilde{p}_2 = (\sqrt{27/128}, 0)$. In (x,y)-Koordinaten berechnen wir dann die Brennpunkte durch $p_i = S^T((\tilde{p}_i) - v)$ und erhalten

$$p_1 = \frac{1}{16}(1-\sqrt{27}, -5-\sqrt{27})^T \text{ und } p_2 = \frac{1}{16}(1+\sqrt{27}, -5+\sqrt{27})^T.$$

Aufgabe 3. Characterisierung von Kreisen:
Sei

$$0 = q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c$$

eine allgemeine Gleichung 2. Grades im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge $0 = q(x, y)$ genau dann einen Kreis definiert, wenn $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22}$ und

$$b_1^2 + b_2^2 > 4a_{11}c$$

gilt (*Hinweis: Kreis ist eine spezielle Ellipse*). Wo befindet sich in diesem Fall der Mittelpunkt des Kreises.

Lösung:
Ein Kreis mit Mittelpunkt $p = (d_1, d_2)$ und Radius $r > 0$ ist definiert als die Menge

$$K := \{w \in \mathbb{R} \mid |\overline{wp}| = r\}.$$

Also muss $w = (x, y) \in K$ die Gleichung

$$q(x, y) = (x - d_1)^2 + (y - d_2)^2 - r^2 = x^2 + y^2 - 2d_1x - 2d_2y + d_1^2 + d_2^2 - r^2 = 0$$

erfüllen. Diese Gleichung ist eine quadratische Gleichung wie in der Behauptung, wobei gilt $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$, $b_1 = -2d_1$, $b_2 = -2d_2$ und $d_1^2 + d_2^2 - r^2 = c$, also gilt auch $b_1^2 + b_2^2 = 4d_1^2 + 4d_2^2 > 4d_1^2 + 4d_2^2 - 4r^2 = 4a_{11}c$.

Sei $0 = q(x, y)$ eine quadratische Gleichung mit $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22}$ und $b_1^2 + b_2^2 > 4a_{11}c$. Aus der Definition sieht man, dass die Menge der Kreise invariant unter Euklidischen Bewegungen ist, da diese Isometrien sind. Deswegen suchen wir, wie im Satz 2.3, eine Bewegung $\Phi = (S, v) \in E(2)$, die diese Gleichung in Normalform bringt. Da $a := a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$, setzen wir $S = \text{Id}$ und es gilt

$$q(x, y) = ax^2 + ay^2 + b_1x + b_2y + c = a\left(x + \frac{b_1}{2a}\right)^2 + a\left(y + \frac{b_2}{2a}\right)^2 - \frac{b_1^2}{4a} - \frac{b_2^2}{4a} + c.$$

Mit $v := \left(\dfrac{b_1}{2a}, \dfrac{b_2}{2a}\right)$ bekommen wir für $(\tilde{x}, \tilde{y}) := (x, y) + v^T$ die Gleichung $q(x, y) = 0$ in Normalform

$$0 = q(x, y) = \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}) = a\tilde{x}^2 + a\tilde{y}^2 - \frac{b_1^2}{4a} - \frac{b_2^2}{4a} + c,$$

die wir durch a dividieren um die übliche Gleichung für Kreise

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = \frac{b_1^2}{4a^2} + \frac{b_2^2}{4a^2} - c/a$$

zu bekommen. Da $b_1^2 + b_2^2 > 4ac$ ist die rechte Seite größer als Null und die Lösungsmenge ist ein Kreiss.

Aufgabe 4. Gleichung zweiten Grades in drei Variablen:
Bestimmen Sie den geometrischen Typ der Lösungsmenge der Gleichung

$$3x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 18 = 0,$$

analog zu dem zwei-dimensionalen Fall. Schreiben Sie dazu die Gleichung in Matrixnotation und berechnen Sie die Eigenwerte der zugehörigen Matrix A. Weiterhin bestimmen Sie eine Bewegung $E(3) = (S, v)$ die die Gleichung in Normalform bringt. Dabei ist $S \in O(3)$, die orthogonale Matrix die durch Eigenvektoren von A erzeugt wird, und $v \in \mathbb{R}^3$ die zugehörige Translation. Überzeugen Sie sich, dass $SAS^T = D$ die Diagonalmatrix bestehend aus den Eigenwerten von A ist.

Lösung:

$$q(x,y,z) = (x,y,z)\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 18 = 0$$

Das charakteristische Polynom der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ist

$$(3-\lambda)^2(5-\lambda) + 2 - 2(3-\lambda) - (5-\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-6) = 0$$

und die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 6$. Der Eigenvector zu λ_1 ist im Kern von $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, also $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und ähnlich erhalten wir $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und man sieht sofort, dass $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$. Nach Normierung erhlaten wir

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$SAS^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/\sqrt{2} & 3/\sqrt{3} & 6/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{2} & 3/\sqrt{3} & 6/\sqrt{6} \\ 0 & 3/\sqrt{3} & -12/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die Bewegung $\Phi \in E(3)$ gegeben durch $\Phi = (S, 0)$ gibt uns die Normalform durch Koordinatentransformation $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, mit $q(x,y,z) = \tilde{q}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = 2\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 + 6\tilde{z}^2 - 18 = 0$, was äquivalent zur Gleichung des Ellipsoids ist:

$$\frac{\tilde{x}^2}{9} + \frac{\tilde{y}^2}{6} + \frac{\tilde{z}^2}{2} = 1.$$