Probeklausur zur Vorlesung "Elementargeometrie"

Dr. Blaž Mramor **1. August 2014**

Aufgabe 1.

a) Sei $\mathcal{A} = (P, G, I)$ eine affine Ebene mit endlich vielen Punkten. Beweisen Sie, dass alle Geraden mit der selben Anzahl paarweise verschiedener Punkte inzidieren.

b) Erklären Sie, wie man $\mathbb{F}_3^2$ zu einer affinen Ebene ergänzt, indem Sie die Definition der Geraden und Inzidenz angeben. Geben Sie alle Punkte und Geraden an, sowie die Äquivalenzklassen paralleler Geraden.

c) Sei $\mathcal{P} = (P, G, I)$ eine projektive Ebene mit endlich vielen Punkten. Beweisen Sie, dass alle Geraden inzidieren mit dem selben Anzahl von verschiedenen Punkten.

Aufgabe 2.

a) Geben Sie eine Inzidenzgeometrie an, die Axiom (P) nicht erfüllt.

b) Geben Sie eine Inzidenzgeometrie an, die Axiom (P) erfüllt, aber (EP) nicht.

c) Ist sphärische Geometrie eine Inzidenzgeometrie?

d) Geben Sie eine Inzidenzgeometrie an, in der keine Anordnung existiert, die (A3) erfüllt.

e) Geben Sie eine Inzidenzgeometrie mit "Anordnung" in der (A1)-(A4) gelten und (A5) nicht gilt.

Begründen Sie die Antworten.

Aufgabe 3. Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ die Poincarésche Kreisscheibe.

a) Geben Sie die hyperbolische Gerade $g \subset P$ an, die mit den Punkten $(1/2, 1/3)$ und $(-1/3, 0)$ inzidiert.

b) Berechnen Sie den hyperbolischen Abstand zwischen $(-1/2, 1/3)$ und $(1/2, -1/3)$.

c) Berechnen Sie eine Isometrie Φ der Poincarésche Kreisscheibe mit $\Phi((0,0)) = (1/2, 1/3)$.

Aufgabe 4.
Gegeben sei die quadratische Gleichung

$$0 = q(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 3x - y + 2.$$

Bringen Sie diese Gleichung in Normalform und bestimmen Sie ihren geometrischen Typ. Wo liegen die Leitgerade und die Brennpunkte in (x, y) Koordinaten, falls sie existieren?

Aufgabe 5. Sei P ein einfaches Polyeder mit Flächen F_j die in Ebenen E_j liegen ($F_j \subset E_j$), wobei $j = 1, ..., n$. Beweisen Sie, das P genau dann konvex ist, wenn für alle $j = 1, ..., n$, der ganze Polyeder P auf der gleichen Seite der Ebene E_j liegt.