Dr. Markus Junker — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2013
Übungsblatt 12

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Blaž Mramor (blaz.mramor@math.uni-freiburg.de)

1. **Totale Differenzierbarkeit I.** Berechnen Sie die totale Ableitung (Jacobi-Matrix) der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von x und y:

   (a) $f(x, y) = \sin(x) \cdot y + \cos(y) \cdot x$.

   (b) $f(x, y) = (x + y)^3$.

   (c) $f(x, y) = \dfrac{1 + x + y}{x^2 + y^2 + 1}$.

   (d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

2. **Totale Differenzierbarkeit II.**

   (a) Berechnen Sie die totale Ableitung (Jacobi-Matrix) der folgenden Funktion

   $$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

   $$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(z) & -\sin(z) \\ \sin(z) & \cos(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   in Abhängigkeit von x, y und z.

   (b) Geben Sie die Ableitung dieser Funktion im Punkt $(2, -1, \frac{\pi}{2})$ an.

3. **Partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht die totale Differenzierbarkeit.** Beweisen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Beispiel aus der Vorlesung)

   $$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y = 0 \\ \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

   partiell differenzierbar nach x und y in jedem Punkt ist.

   Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, ist f allerdings *nicht stetig* in 0 und deshalb auch nicht total differenzierbar. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen (in jedem Punkt) und beweisen Sie, dass die partiellen Ableitungen nicht stetig in 0 sind.

Bitte wenden!

4. **Kettenregel.**

   (a) Seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

   $$f(x) := (\cos(x), \sin(x)) \quad \text{und} \quad g(x, y) = (x^2 - y^2).$$

   Berechnen Sie die Abbildung $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ihre Ableitung. Berechnen Sie außerdem die Ableitung von $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Kettenregel.

   (b) Seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

   $$f(x, y) := (x^2 \sin(y), \cos(y), x(1 - y)) \quad \text{und} \quad g(x, y, z) = xy + z.$$

   Berechnen Sie mit der Kettenregel die totale Ableitung von $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

5. **Zusatzaufgabe** (6 Extrapunkte).

   Berechnen Sie alle kritischen Punkte von folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Betrachten Sie die Hesse-Matrix in diesen Punkten und stellen Sie fest, welche von den kritischen Punkten lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte sind.

   (a) $f(x, y) = (x - y)^2$
   (b) $g(x, y) = (x + y)^3 - 4xy$
   (c) $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$

   Hinweis: Zum lösen dieser Aufgabe müssen Sie selbständig vorarbeiten; dies wird erst in der letzten Vorlesungswoche besprochen.

Abgabe am 15.7.2013 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung