Dr. Markus Junker — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2013
Übungsblatt 2

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Blaž Mramor (blaz.mramor@math.uni-freiburg.de)

1. **Symmetrische Gruppen.** (4 pt.) Sei $A := \{a, b, c\}$ eine Menge von drei Elementen. Bestimmen Sie die Gruppentabelle von $Sym(A)$, der Gruppe von allen bijektiven Abbildungen $A \to A$.

2. **Restklassen.** (6 pt.) Sei $N > 0$ eine natürliche Zahl. Wir definieren auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen die folgende Relation

$$x \sim y \iff \text{es gibt ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } k \cdot N = x - y,$$

d.h. zwei Zahlen heißen äquivalent, wenn ihre Differenz durch N teilbar ist.

   (a) Beweisen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation (also reflexiv, symmetrisch und transitiv) ist. Die zugehörigen Äquivalenzklassen werden **Restklassen** modulo N genannt. Die Menge dieser Restklassen bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Die zu x gehörige Äquivalenzklasse wird mit $\overline{x}$ bezeichnet.

   (b) Begründen Sie, dass $\{0, \ldots, N-1\}$ ein Vertretersystem (Repräsentantensystem) ist.

   (c) Zeigen Sie, dass

$$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x + y}$$

   und

$$\overline{x} \cdot \overline{y} := \overline{x \cdot y}$$

   gültige Definitionen einer Operation auf der Menge der Restklassen sind, d.h. nicht von der Wahl der Vertreter x und y abhängen.

3. **Ringaxiome.** (4 pt.) Beweisen Sie (nur unter Benutzung der in der Vorlesung angegebenen Axiome), dass in jedem Ring gilt:

$$r \cdot (-s) = -(r \cdot s) = (-r) \cdot s,$$

$$(-r) \cdot (-s) = r \cdot s.$$

4. **Der Körper $\mathbb{F}_3$.** (2 pt.) Auf der Menge $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ kann die Struktur eines Körpers definiert werden. Finden Sie diese, und geben Sie die Verknüpfungen in Tabellenform an:

+	0	1	2
0			
1			
2			

·	0	1	2
0			
1			
2			

Abgabe am 29.4.2013 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung