Dr. Markus Junker — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2013
Übungsblatt 3

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Blaž Mramor (blaz.mramor@math.uni-freiburg.de)

1. **Projektiver Raum.** Der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^2$ ist die Menge aller Geraden durch den Nullpunkt im $\mathbb{R}^3$.

   (a) Formal definiert man das mit folgender Relation auf $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$:

   $$x \sim y \;\Leftrightarrow\; \text{es gibt ein } \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ mit } x = \lambda \cdot y.$$

   Zeigen Sie, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

   (b) Wir sagen, dass zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ orthogonal sind, wenn ihr Skalarprodukt Null ist:

   $$\langle v, w\rangle := v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 0.$$

   Wir bezeichnen die Äquivalenzklassen mit $[v] \in \mathbb{R}P^2 = (\mathbb{R}^3\backslash\{0\})/\sim$. Zeigen Sie, dass die Definition von Orthogonalität $\langle [v], [w]\rangle = \langle v, w\rangle = 0$ auch für Äquivalenzklassen Sinn macht, d.h. es hängt nicht von den Wahl der Repäsentanten ab.

2. **Untervektorräume.**

   (a) Bestimmen Sie, ob $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

   (b) Bestimmen Sie, ob $\left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{R} \right\}$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

   (c) Wir definieren das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wie in Augabe 1. Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ die Menge

   $$v^\perp := \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, w\rangle = 0\}$$

   einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ definiert.

   (d) Seien $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ und $T_1 := v_1^\perp$, $T_2 := v_2^\perp$, zwei $\mathbb{R}$-Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie ob $T_1 \cap T_2$ und $T_1 \cup T_2$ auch $\mathbb{R}$-Untervektorräume sind.

Bitte wenden!

3. **Lineare Unabhängigkeit:** Sei V ein k-Vektorraum. Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heissen **linear abhängig**, falls Koeffizienten (also Elemente) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ aus k existieren, die nicht alle 0 sind, so dass

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

Falls solche Koeffizienten nicht existieren, also falls aus einer solchen Gleichung folgt, dass $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ sein muss, heissen die Vektoren **linear unabhängig**.

   (a) Beweisen Sie durch Angabe einer geeigneten Linearkombination, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \\ 26 \end{pmatrix}$$

   im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

   (b) Beweisen Sie das die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind und im Vektorraum $\mathbb{F}_2^3$ linear abhängig.

4. **Unendliche Folgen.** V sei der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum der unendlichen $\{0, 1\}$-Folgen.

   (a) Sei U die Menge der Folgen von endlichem Träger, d.h. die Teilmenge von V, die aus denjenigen Folgen besteht, bei denen nur an endlich vielen Stellen eine 1 steht. Bestimmen Sie, ob U ein Untervektorraum von V ist.

   (b) Sei W die Menge aller periodischen Folgen, d.h. die Teilmenge von V, in der jede Folge bestimmt ist durch die Repetition einer endlichen Folge. Bestimmen Sie, ob W ein Untervektorraum von V ist.

Zusatz: (2 Bonuspunkte) Zeigen Sie, dass es eine Injektion von der Menge der endlichen $\{0, 1\}$-Folgen nach V gibt.

Abgabe am 6.5.2013 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung