Dr. Markus Junker — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2013
Übungsblatt 4

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Blaž Mramor (blaz.mramor@math.uni-freiburg.de)

1. **Basen.** (Begründen Sie Ihre Ergebnisse in (a)-(c).)

   (a) Ergänzen Sie die folgenden Vektoren zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$:

   $$\begin{pmatrix}5\\7\\8\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}4\\7\\8\end{pmatrix}$$

   (b) Ergänzen Sie die folgenden Vektoren zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$:

   $$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

   (c) Wählen Sie unter den folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus:

   $$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}10\\11\\-12\end{pmatrix}$$

2. **Dimension.** Bestimmen Sie eine Basis der folgenden Vektorräume, und geben Sie die Dimension an:

   (a) V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich 4.

   (b) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum

   $$V := \{ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + ... + x_n = 0\}.$$

   (c) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum

   $$V := \{x \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + y \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + z \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Bitte wenden!

3. **Lineare Abbildungen.** Bestimmen Sie welche von den folgenden Abbildungen linear sind. Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

   (a) Spiegelung an der y-Achse: $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $s(x, y) = (-x, y)$.

   (b) Drehung in $\mathbb{R}^2$ um einen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$.

   (c) Translation um den Vektor $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$: $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\tau(x, y) = (x + v_1, y + v_2)$.

   (d) Sei $\mathbb{R}[X]$ der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$ und $\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ die Ableitung $\frac{d}{dx} : P(x) \mapsto P'(x)$.

   (e) Sei $\mathbb{R}[X]$ der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$ und $M_Q : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ die Multiplikation mit dem Polynom $Q \in \mathbb{R}[X]$, d.h. $M_Q(P) = Q \cdot P$.

   (f) Sei V der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum der unendlichen $\{0, 1\}$-Folgen und $\sigma_l : V \to V$ definiert durch $\sigma_l : \{x_1, x_2, x_3, ...\} \mapsto \{x_2, x_3, ...\}$.

   (g) Sei V der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum der unendlichen $\{0, 1\}$-Folgen und $\sigma_r : V \to V$ definiert durch $\sigma_r : \{x_1, x_2, ...\} \mapsto \{0, x_1, x_2, ...\}$.

   (h) Sei V der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum der unendlichen $\{0, 1\}$-Folgen und $\tilde{\sigma}_r : V \to V$ definiert durch $\tilde{\sigma}_r : \{x_1, x_2, ...\} \mapsto \{1, x_1, x_2, ...\}$.

4. **Linearität der Umkehrabbildung.** V, W seien K-Vektorräume. Zeige: Die Umkehrabbildung einer bijektiven K-linearen Abbildung $V \to W$ ist auch K-linear.

Abgabe am 13.5.2013 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung