Dr. Markus Junker — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2013
Übungsblatt 5

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Blaž Mramor (blaz.mramor@math.uni-freiburg.de)

1. **Spiegelungen.** Sei $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein fest gewählter Vektor mit $x_0^2 + y_0^2 = 1$ und sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung mit Spiegelungsachse
$$\left\{ r \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \middle| \, r \in \mathbb{R} \right\}.$$
Berechnen Sie die Matrix A für φ (bzgl. der Standardbasis). Dafür können Sie die orthogonale Projektion von $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ auf die Spiegelungsachse benutzen. Die ist gegeben durch
$$\left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$
wobei der Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert ist als $\left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\rangle := v_1 x_0 + v_2 y_0$.
Rechnen Sie nach, dass $A^2 = Id$ gilt.

2. **Komposition.** Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung um die x-Achse um 60° in eine der beiden möglichen Richtungen und $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der $\{y, z\}$-Ebene. Berechnen Sie für die beiden Abbildungen $\phi \circ \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi \circ \phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Matrix bezüglich der Standardbasis.

3. **Basiswechsel in $\mathbb{R}^2$.** Sei $B := \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, die bezüglich B dargestellt wird als $\phi_B := \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ihre Darstellung $\phi_{B'}$ bezüglich der Basis $B' := \{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

4. **Basiswechsel.** Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten und vom Grad höchstens 4. Es sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis $1, X, X^2, X^3, X^4$ und $\mathcal{B}'$ die Basis der „fallenden Faktoriellen“ $1, X, (X)_2, (X)_3, (X)_4$, wobei $(X)_n := X\,(X-1) \cdots (X-n+1)$.
Bestimmen Sie die beiden Basiswechselmatrizen und für die Ableitung $\varphi := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ die darstellenden Matrizen ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}'}$, ${}_{\mathcal{B}'}\varphi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}'}\varphi_{\mathcal{B}'}$. (Beide Basen sollen dafür in der angegebenen Reihenfolge geordnet sein.)

Abgabe am 27.5.2013 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung