Dr. Markus Junker — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2013

Übungsblatt 6

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Blaž Mramor (blaz.mramor@math.uni-freiburg.de)

1. **Invertieren von Matrizen.** Invertieren Sie die folgende Matrix mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. **Kern und Bild.** Bestimmen Sie jeweils eine Basis von Kern und Bild der linearen Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, welche durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

gegeben wird.

Wie groß ist die Dimension des Lösungsraumes, wenn die Matrix ein homogenes lineares Gleichungssystem beschreibt?

3. **Transposition und Inverses.** Sei $A = (a_{i,j})$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix und $A^T = (a_{j,i})$ ihre transponierte Matrix (die Matrix A^T bekommt man, wenn man die Matrix A an ihrer Hauptdiagonale "spiegelt"). Beweisen Sie:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Hinweis: Versuchen Sie nicht zu rechnen. Beweisen Sie zunächst die Formel

$$A^T \cdot B^T = (B \cdot A)^T.$$

Verwenden Sie danach diese und die Definition des Inversen, also $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id$.

Bitte wenden!

4. **Zassenhaus-Algorithmus.** Sei $V \subseteq \mathbb{R}^4$ der Untervektorraum, welcher durch die Vektoren

$$v_1 = (1,2,3,6),\ v_2 = (0,1,1,2),\ v_3 = (-1,0,-1,-2)$$

aufgespannt wird. Sei $W \subseteq \mathbb{R}^4$ der Raum, welcher durch die Vektoren

$$w_1 = (1,0,1,2),\ w_2 = (3,0,3,6),\ w_3 = (3,1,2,6),\ w_4 = (0,-2,2,0)$$

aufgespannt wird. Bestimmen Sie Basen der Untervektorräume:

(a) $V + W := \{\alpha v + \beta w \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ v \in V,\ w \in W\}$,

(b) $V \cap W$.

Hinweis - Zassenhaus-Algorithmus: Bilden Sie die Matrix der folgenden Form:

$$\begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} & v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{k,1} & \cdots & v_{k,n} & v_{k,1} & \cdots & v_{k,n} \\ w_{1,1} & \cdots & w_{1,n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{l,1} & \cdots & w_{l,n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $v_j = (v_{j1}, ..., v_{jn})$. Nach Reduzierung mit dem Gaussverfahren (ohne Spaltenvertauschungen) hat die Matrix die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,n} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m,1} & \cdots & f_{m,n} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & g_{1,1} & \dots & g_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g_{r,1} & \dots & g_{r,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $f_1, \dots, f_m$ bilden dann eine Basis von $V + W$ und die Vektoren $g_1, \dots, g_r$ bilden eine Basis von $V \cap W$. Diskutieren Sie in den Übungen, warum.

Bemerkung: *Eine Basis von $V + W$ bekommt man auch ohne den Zassenhaus-Algorithmus, indem man die Vektoren $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l$ als Zeilen untereinanderschreibt, und diese Matrix mit dem Gaußverfahren (ohne Spaltenvertauschungen) in Zeilenstufenform bringt. Die* **von 0 verschiedenen** *Zeilen bilden dann eine Basis von $V + W$.*

Abgabe am 3.6.2013 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung