Dr. Markus Junker — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2013
Übungsblatt 7

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Blaž Mramor (blaz.mramor@math.uni-freiburg.de)

1. **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (4 Punkte).**

   Beweisen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

   $$\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle.$$

   Hinweis: Beweisen Sie zunächst:

   $$0 \leq \langle v, v\rangle - 2\lambda\langle v, w\rangle + \lambda^2\langle w, w\rangle$$

   für eine beliebige reelle Zahl λ. Wählen Sie λ nun geschickt so, dass Sie die folgende Gleichung erhalten:

   $$0 \leq \langle v, v\rangle - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\langle w, w\rangle}$$

2. **Invarianz des Skalarproduktes unter Drehungen (4 Punkte).** Beweisen Sie, dass eine Drehung im $\mathbb{R}^2$, also eine Abbildung, welche durch die Matrix

   $$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

   beschrieben wird, das Skalarprodukt invariant lässt. Mit anderen Worten, rechnen Sie nach, dass

   $$\langle M \cdot v, M \cdot w\rangle = \langle v, w\rangle$$

   für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ ist.

   Zusatzfrage (4 Extrapunkte): Bestimmen Sie die Matrizen aller Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die das Skalarprodukt invariant lassen.

3. **Determinante (2 Punkte).** Berechnen Sie:

   $$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Hinweis: Benutzen Sie den Entwicklungssatz für Determinanten.

Bitte wenden!

4. **Orthogonale Projektion (6 Punkte).** Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine **Orthonormalbasis** des $\mathbb{R}^n$, also eine Basis des $\mathbb{R}^n$, für die gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Anders ausgedrückt, die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ stehen paarweise aufeinander senkrecht und haben die Länge 1.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle w, v_i \rangle$ die i-te Koordinate des Vektors w bzgl. der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$ ist, d.h.

$$w = \sum_{i=1}^{n} \langle w, v_i \rangle v_i.$$

(b) Berechnen Sie die Projektion von $(1, 2, 3)$ auf die durch $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ gegebene Ebene.
Hinweis: Finden Sie zuerst eine Orthonormalbasis $\{v_1, v_2\}$ der Ebene und dann verwenden Sie Teil (a).

Abgabe am 10.6.2013 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung