Dr. Markus Junker — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2013

Übungsblatt 8

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Blaž Mramor (blaz.mramor@math.uni-freiburg.de)

1. **Binärer Hamming-Code.** Stellen Sie für einen binären $[n, k, d] = [15, 11, 3]$-Hamming-Code die Erzeugermatrix G und die Prüfmatrix H in der Form

$$G = \left(\mathrm{Id}_k \,|A\right) \qquad H = \left(-A^T |\, \mathrm{Id}_{n-k}\right)$$

auf. Kodieren Sie den Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fälschen Sie das Ergebnis ab, indem Sie ein beliebiges Bit verändern. Berechnen Sie anschließend das Syndrom und überprüfen Sie, dass es zum abgeänderten Bit korrespondiert (d.h. in der entsprechenden Spalte der Matrix H auftaucht).

2. **Perfektheit des Hamming-Codes.** Zeigen Sie, dass die Hamming-Codes perfekt sind.

3. **Untergruppen.** Betrachte die (nicht kommutative) Gruppe D_4 der Symmetrien eines Quadrats (Rotationen und Spiegelungen, welche das Quadrat in sich überführen). Das Gruppengesetz ist wiederum durch die Hintereinanderausführung von Abbildungen gegeben. Sei σ die Rotation um 90 Grad (gegen den Uhrzeigersinn) und τ die Spiegelung an der x-Achse. Diese Elemente erzeugen D_4:

1	Identität
σ	Rotation um 90 Grad
σ^2	Rotation um 180 Grad
σ^3	Rotation um 270 Grad
τ	Spiegelung um die x-Achse
$\sigma\tau$	Spiegelung an der Hauptdiagonalen
$\sigma^2\tau$	Spiegelung an der y-Achse
$\sigma^3\tau$	Spiegelung an der Nebendiagonalen

Hier haben wir z.B. „ $\sigma\tau$ “ für die Hintereinanderausführung $\sigma \circ \tau$ geschrieben. Dies bedeutet, dass **zuerst τ und dann σ** ausgeführt wird.

Es gelten die Relationen $\sigma^4 = 1$, $\tau^2 = 1$ und $\tau\sigma\tau = \sigma^3$. Mit Hilfe dieser lassen sich alle Ausdrücke in σ und τ wieder auf eine der 8 Formen in der Tabelle bringen.

Bestimmen Sie alle 10 Untergruppen von D_4 und geben Sie die Ordnungen der Elemente an.

Bitte wenden!

4. **Ein Gruppenisomorphismus.** Betrachten Sie die Gruppe der invertierbaren 2×2 Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{F}_2$:

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{F}_2, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Die Gruppenoperation ist die Matrixmultiplikation.

Geben Sie einen Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \to S_3$$

an. Hier bezeichnet S_3 die symmetrische Gruppe, also die Gruppe der Bijektionen der Menge $\{1, 2, 3\}$ in sich. Erinnere: Das Gruppengesetz wird durch die Hintereinanderausführung von Funktionen gegeben.

Hinweis: Um zu beweisen, dass es sich wirklich um einen Isomorphismus handelt, können Sie zum Beispiel die Gruppentabellen vergleichen.

Abgabe am 17.6.2013 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung