

In der Hauptklausur werden *nur ca. 10 Aufgaben* gestellt. Sie haben dafür 2 Stunden Zeit. 50 % reichen zum Bestehen.

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge von folgendem linearen Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}3x + 4y + z &= 0 \\ x - y - z &= 1 \\ x + 5y + z &= 2\end{aligned}$$

2. (a) Berechnen Sie eine Basis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Untervektorraumes des  $\mathbb{R}^4$ .

- (b) Ergänzen Sie die gefundene Basis zu einer Basis des  $\mathbb{R}^4$ .

3. Berechnen Sie eine Basis des Schnittes  $U_1 \cap U_2$  der beiden folgenden Untervektorräume des  $\mathbb{R}^4$ :

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y - 2z + 3w = 0 \right\},$$

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 3z - w = 0 \right\}.$$

4. Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Interpretieren Sie die Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , welche durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

beschrieben wird, geometrisch.

5. Betrachten Sie die lineare Abbildung  $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , welche bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben wird. Bestimmen Sie die Matrix dieser Abbildung bzgl. der Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6. Bestimmen Sie jeweils eine Basis von Kern und Bild der linearen Abbildung  $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , welche durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

gegeben wird.

7. Betrachten Sie

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

als Matrizen über  $\mathbb{F}_3$  bzw. über  $\mathbb{F}_5$ . Berechnen Sie in beiden Fällen das Produkt  $M_1 \cdot M_2$ .

8. Sei  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie die Determinante  $\det(M)$  und die Inverse  $M^{-1}$ .

9. Die Erzeugermatrix  $G := (\text{id}_{10} | A)$  gibt uns einen Code über  $\mathbb{F}_3$ . Dabei ist  $A$  die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die zugehörige Prüfmatrix an.

10. Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe. Der Zentralisator von  $g \in G$  ist definiert durch

$$Z(g) := \{h \in G \mid h \circ g = g \circ h\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle  $g \in G$  der Zentralisator  $Z(g)$  eine Untergruppe von  $G$  ist.

11. Betrachten Sie die Abbildung  $\varphi : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$ , die durch die Wertetafel

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline \varphi(x) & 4 & 7 & 1 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{array}$$

gegeben ist. Man sieht, dass  $\varphi$  ein Gruppenelement von  $S_7$  ist. Berechnen Sie die Ordnung von  $\varphi$  in  $S_7$ .

12. Berechnen Sie den g.g.T. der Zahlen 36 und 93 und finden Sie eine Darstellung der Form

$$\text{ggT}(36, 93) = m \cdot 36 + n \cdot 93$$

mit  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

13. Berechnen Sie das multiplikative Inverse von  $\bar{5}$  im Restklassenring  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ .
14. Bestimmen Sie die Gruppentafel von  $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$ .
15. Geben Sie einen Gruppenisomorphismus  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  als Wertetabelle an.
16. Berechnen Sie  $\varphi(5)$ ,  $\varphi(6)$ ,  $\varphi(7)$ ,  $\varphi(8)$ ,  $\varphi(9)$ ,  $\varphi(10)$ ,  $\varphi(11)$  und  $\varphi(12)$ , wobei  $\varphi$  die Eulersche  $\varphi$ -Funktion ist.
17. Finden Sie eine ganze Zahl  $x$  so, dass

$$\begin{aligned}x &\equiv 10 \pmod{9}, \\x &\equiv 9 \pmod{10}.\end{aligned}$$

18. Bestimmen Sie den g.g.T. der Polynome  $f := X^4 + X + 1$  und  $g := X^2 + 1$  in  $\mathbb{F}_2[X]$  und finden Sie eine Darstellung der Form:

$$\text{ggT}(f, g) = m \cdot f + n \cdot g,$$

mit  $m, n \in \mathbb{R}[X]$ .

19. Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$$

im Punkt  $x = 0, y = 0$  und in Richtung  $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ , für einen Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

20. Berechnen Sie die Extremstellen der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^3 + 6 \cdot x \cdot y + 92 \cdot x + 3 \cdot y$$

und bestimmen Sie, ob es sich jeweils um ein Minimum, Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.