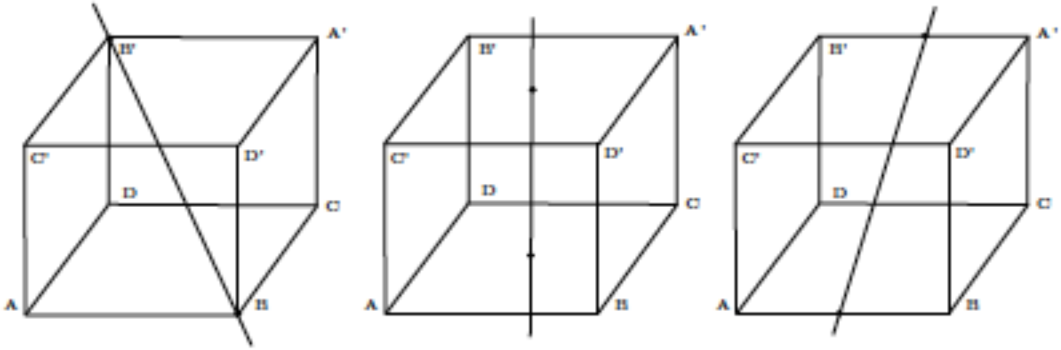
Seien die Ecken des Würfels mit $A, A', B, B', C, C', D, D'$ bezeichnet. Die Menge der Hauptachsen sei durch $\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\}, \{D, D'\}$ gegeben (vgl. Bild). Weiterhin bezeichne $D(W)$ die Drehgruppe des Würfels. Wir betrachten die Abbildung $G : D(W) \to S_4$, die einer Drehung die zugehörigen Permutation der 4 Hauptachsen des Würfels (als Menge, also ohne Richtung betrachtet) zuordnet und werden zeigen, dass diese Abbildung



bijektiv ist.

1. Injektivität: Man sieht leicht, dass G ein Gruppenhomomorphismus ist. Daher müssen wir nur zeigen, dass ausschließlich die Identität alle Hauptachsen fest lässt. Dazu betrachten wir eine beliebige Drehung φ des Würfels, so dass die Mengen $\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\}$, $\{D, D'\}$ jeweils auf sich abgebildet werden. Insbesondere gilt also $\varphi(A) = A$ oder $\varphi(A) = A'$. Betrachten wir zunächst den zweiten Fall, so können wir am Bild ablesen, dass dann auch $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C') = C$ und $\varphi(D) = D'$ gilt. Dann muss aber auch $\varphi(A') = A$, $\varphi(B') = B$, $\varphi(C) = C'$ und $\varphi(D') = D$ gelten. Also gilt $\varphi = -\mathrm{id}$ und ist keine Drehung. Dieser Fall kann also nicht auftreten. Im ersten Fall zeigt man analog, dass dann tatsächlich $\varphi = \mathrm{id}$ gilt.

2. Surjektivität: Um die Surjektivität zu zeigen, müssen wir uns nun nur noch überlegen, dass die Mächtigkeit von $D(W)$ mindestens $|S_4| = 24$ beträgt. Hierzu listen wir 24 Drehungen auf (vgl. Bild):

- die Identität
- die Drehungen um die Hauptdiagonalen (4×2 verschiedene Drehungen)
- die Drehungen um die Achsen durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten (3×3 verschiedene Drehungen)
- die Drehungen um die Achsen durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten (6 verschiedene Drehungen).