

# Existenz von Minimax-Geodätischen

Diplomarbeit

im Studiengang Mathematik  
angefertigt im Fachbereich Differentialgeometrie  
der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

von

Nena-Maria Röttgen

Freiburg, den 15. Dezember 2008

Betreuer: Prof. Dr. V. Bangert



Nena Röttgen

# Existenz von Minimax-Geodätischen

Diplomarbeit, 2008  
Mathematisches Institut der Universität Freiburg

Urheberschaftserklärung: Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Beschränkte, minimal berandete Streifen</b>	<b>3</b>
1.1 Notation . . . . .	3
1.2 Minimale Geodätische . . . . .	4
1.3 Birkhoff'scher Verkürzungsprozess . . . . .	6
1.4 Konvexität von (bmb)-Streifen . . . . .	11
1.5 Der Injektivitätsradius . . . . .	14
1.6 Fermikoordinaten . . . . .	20
1.7 Randgeodätische verlaufen asymptotisch . . . . .	25
<b>2 Existenz Minimax-Geodätischer</b>	<b>28</b>
2.1 Die Minimax-Methode . . . . .	28
2.2 Das Längenfunktional $\mathcal{L}$ . . . . .	31
2.3 Der Birkhoffsche Verkürzungsprozess auf $\hat{\Omega}$ . . . . .	42
2.4 Die Palais-Smale-Bedingung für $\mathcal{L}$ . . . . .	50
2.5 Minimax-Geodätische . . . . .	57
2.6 Minimax-Geodätische auf 2-Tori . . . . .	61
<b>3 Ausblick</b>	<b>66</b>
<b>4 Literaturverzeichnis</b>	<b>67</b>



# Einleitung

Wir betrachten einen in eine zweidimensionale vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit eingebetteten Streifen  $S$  endlicher Oberfläche, der von zwei disjunkten minimalen Geodätischen berandet wird. Wir nehmen weiterhin an, dass die Gaußkrümmung von oben durch eine positive Konstante beschränkt ist.

Auf nach Bogenlänge parametrisierten Kurven  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$ , die in die beiden Enden des Streifens laufen, definieren wir ein Funktional  $\mathcal{L}$ , indem wir das Längenfunktional mit einer der beiden Randgeodätischen renormalisieren: Wir vergleichen die Länge eines Segments einer gegebenen Kurve mit der Länge eines geeignet gewählten Segments dieser Randgeodätischen. Das Funktional erhalten wir dann als Grenzwert dieser Differenzen für beliebig große Segmente. Das so definierte Funktional stellt ein Maß für die Minimalität der Kurve dar.

Wir zeigen, dass bezüglich  $\mathcal{L}$  eine Minimax-Geodätische in  $S$  existiert, d.h. eine Geodätische  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$ , die bezüglich  $\mathcal{L}$  kein lokales Minimum darstellt und für die gilt, dass

$$\mathcal{L}(\gamma) = \inf_{H \in \mathcal{H}} \max_{\tau \in [0,1]} \mathcal{L}(H(\tau)),$$

wobei  $\mathcal{H}$  die Menge der Homotopien zwischen den Randgeodätischen bezeichnet.

Die hier vorgestellte Methode beruht auf dem Birkhoffschen Verkürzungsprozess [Bir17]. Dieser zerlegt die betrachteten Kurven gemäß ihres Definitionsbereichs in gleich große Segmente und ersetzt diese dann durch minimale geodätische Segmente. Bekannte Anwendungen sind zum Beispiel der Beweis der Existenz einer geschlossenen Geodätischen auf allen kompakten Mannigfaltigkeiten [], oder die Berechnung des CW-Komplexes des Raums der Kurven mit festen Endpunkten (vgl. [Mil63]).

Diese Beispiele verbindet jedoch die Tatsache, dass der Definitionsbereich und die Zielmenge kompakt sind. Die Nicht-Kompaktheit wirft einige technische Probleme auf: Existiert eine geeignete Unterteilung für alle Kurven, so dass die Ersetzung durch minimale Segmente wohldefiniert ist? Welche Para-

metrisierung soll die verkürzte Kurve erhalten? Bezüglich welcher Topologie kann man erwarten, dass eine solche Abbildung stetig ist? Erfüllt das Funktional eine bezüglich dieses Verkürzungsprozesses abgewandelte Palais-Smale-Bedingung?

Um die erste Frage positiv zu beantworten, zeigen wir in Kapitel 1, dass  $S$  konvex und der Injektivitätsradius von  $S$  positiv ist, wobei hier  $S$  als Mannigfaltigkeit mit Rand aufgefasst wird. Wir zeigen dann zu Beginn von 2, dass der Minimaxwert endlich ist. Dies wird uns zu einem Teilraum von Kurven führen, auf dem  $\mathcal{L}$  gleichmäßig beschränkt ist, und dessen Kurven fest vorgegebene Parametrisierung besitzen.

Wir werden sehen, dass es möglich ist, diese Kurven in einen kompakten Mittelteil und zwei fast minimale Kurvenenden zu zerlegen. Diese Kurvenenden können so gewählt werden, dass der Verkürzungsprozess sie beliebig wenig abändert. Dieses Prinzip wird in zwei verschiedenen Varianten angewandt, um zunächst zu zeigen, dass der Verkürzungsprozess bezüglich der Supremumsmetrik stetig ist, und dann eine Version der Palais-Smale-Bedingung für  $\mathcal{L}$  nachzuweisen.

Im Anschluss werden wir zeigen, dass unter zusätzlichen Bedingungen, auch Minimaxgeodätische existieren, die die Bergpass-Eigenschaften erfüllen, d.h. die den Schnitt jeder ihrer offenen Umgebungen mit der Subniveaumenge des Minimaxwertes in mindestens zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt. Damit übertragen wir eine Aussage von Hofer [Hof85] für differenzierbare Funktionale auf unseren Fall.



# 1 Beschränkte, minimal berandete Streifen

## 1.1 Notation

Wir bezeichnen mit  $(M, g)$  eine 2-dimensionale, orientierte, vollständige, nicht kompakte, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand, auf der die *Gaußkrümmung*  $K$  durch eine positive Konstante  $R$  nach oben beschränkt ist. Die *2-dimensionale Volumenform* sei  $dF$  und die *Oberfläche* einer messbaren Menge  $A \subset M$

$$F(A) = \int_A dF.$$

Für stetige, stückweise stetig differenzierbare Kurven  $c : I \rightarrow M$ , werden die *Länge* und die *Energie* definiert:

$$L(c) := \int_I |\dot{c}(t)| dt \quad E(c) := \frac{1}{2} \int_I |\dot{c}(t)|^2 dt,$$

wobei  $|\cdot| := \sqrt{g(\cdot, \cdot)}$  die durch  $g$  induzierte *Norm* bezeichnet. Eine Kurve  $c : I \rightarrow M$  sei *proportional zur Bogenlänge parametrisiert*, falls  $c$  stetig und stückweise stetig differenzierbar ist und ein  $a > 0$  existiert, so dass  $|\dot{c}(t)| = a$  für alle  $t \in I$ , an denen die Ableitung existiert. Ist  $a = 1$  so ist  $c$  *nach Bogenlänge parametrisiert (n.Bl.p.)*.

Für eine Menge  $A \subset M$ , bezeichnen wir mit  $\bar{A}$ ,  $\text{int}(A)$  bzw.  $\partial A$  den *Abschluss*, das *Innere* bzw. den *Rand* von  $A$ . Die Menge der Bildpunkte einer Kurve  $\gamma$  bezeichnen wir im Folgenden abkürzend auch mit  $\gamma$ . Der *Abstand*  $d^M : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  wird wie üblich definiert und für Teilmengen  $A, B \subset M$  folgendermaßen erweitert

$$d^M(A, B) := \inf_{\substack{p \in A \\ q \in B}} d^M(p, q).$$

Für eine Menge  $A \subset M$  und  $\varepsilon > 0$  bezeichnen wir den  $\varepsilon$ -Ball um  $A$  mit

$$\mathcal{B}_\varepsilon(A) := \{p \in M \mid d^M(p, A) < \varepsilon\}.$$

Die Exponentialabbildung auf  $T_p M$  bezeichnen wir mit  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  und definieren für  $v \in T_p M$  die Geodätische  $\gamma_v : \mathbb{R} \rightarrow M$  durch  $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ . Ist das Differential  $\text{Dexp}_p$  an der Stelle  $v \in T_p M$  ausgeartet, so sagen wir  $q := \exp_p(v)$  ist konjugiert zu  $p$  (entlang  $\gamma_v$ ).

Der *Konjugationsradius* und der *Injektivitätsradius* eines Punktes  $p \in M$  sind durch  $\text{conj}_M(p) := \inf\{|v| \mid v \in T_p M : \text{Dexp}_p(v) \text{ ist ausgeartet}\}$  bzw.  $\text{inj}_M(p) := \sup\{\rho > 0 \mid \exp_p|_{\mathcal{B}_\rho(0_p)} \text{ ist injektiv}\}$  definiert.

## 1.2 Minimale Geodätische

Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  heißt *minimale Geodätische*, falls für alle  $s < t$  gilt:

$$L(\gamma|_{[s,t]}) = d^M(\gamma(s), \gamma(t)). \quad (1.1)$$

Ist  $\gamma$  auf einem beschränkten Intervall  $I = [a, b]$  definiert und (1.1) erfüllt für alle  $s < t \in I$ , so nennen wir  $\gamma$  ein *minimales geodätisches Segment* oder kurz *minimales Segment*. Seien weiterhin  $p = \gamma(a)$  und  $q = \gamma(b)$ , so schreiben wir auch  $\gamma_{pq}$  an Stelle von  $\gamma$ .

Da die Mannigfaltigkeit  $M$  vollständig ist, ist nach dem Satz von Hopf und Rinow jede Geodätische  $\gamma_v$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert [Kli95, Thm. 2.1.3]. Ist  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow M$  ein geodätisches Segment, so bezeichnen wir mit  $\tilde{\gamma}|_{[a', b']}$  die eindeutig definierte geodätische Fortsetzung von  $\tilde{\gamma}$  auf das Intervall  $[a', b'] \supset [a, b]$ .

Wir erinnern nun an einige Tatsachen, die Geodätische betreffen. Diese werden im weiteren Verlauf der Arbeit oft auch ohne Hinweis auf diesen Fakt benutzt.

### 1.2.1 Fakt

1. [Kli78, Thm. 2.1.3] Seien  $p, q \in M$ , so existiert ein minimales Segment  $\gamma_{p,q}$ , das  $p$  und  $q$  verbindet.
2. Minimale Geodätische verlassen jedes Kompaktum in endlicher Zeit.
3. Schneiden sich zwei minimale Segmente zweimal, so entsprechen die Schnittpunkte den Endpunkten beider Segmente oder der Schnitt der beiden Segmente ist bereits selbst ein minimales Segment, das heißt insbesondere, dass die Fortsetzung der beiden Segmente zu einer Geodätischen auf ganz  $\mathbb{R}$  bis auf Parametrisierung übereinstimmt.

4. Sind  $c_1$  und  $c_2$  zwei minimale Geodätische und existieren zwei Folgen  $s_n \rightarrow \infty$  und  $t_n \rightarrow \infty$  oder  $s_n \rightarrow \infty$  und  $t_n \rightarrow -\infty$ , so dass  $d^M(c_1(s_n), c_2(t_n)) \rightarrow 0$ , so schneiden  $c_1$  und  $c_2$  sich nicht oder  $c_1$  und  $c_2$  sind schon bis auf Parametrisierung gleich.



Abbildung 1.1: Minimale Geodätische, die in eine Richtung asymptotisch verlaufen

BEWEIS (VON FAKT 1.2.1, AUSSAGE 4):

Die Aussage beruht auf der Tatsache, dass Geodätische differenzierbar sind. Existiert hingegen ein Knick, also eine Stelle an der eine Kurve nicht differenzierbar ist, so lässt sich eine „Abkürzung“ konstruieren. Dazu argumentieren wir indirekt und nehmen an, dass  $c_1, c_2$  Geodätische sind, die sich o.B.d.A. an der Stelle 0 schneiden und für die monoton wachsende Folgen  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}, (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wie oben beschrieben existieren. Wir betrachten die Kurve

$$\gamma(t) := \begin{cases} c_1(t) & \forall t \leq 0 \\ c_2(t) & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Sind die Tangentialvektoren  $\dot{c}_1(0)$  und  $\dot{c}_2(0)$  linear unabhängig, ist  $\gamma$  bei 0 nicht differenzierbar. Aus der ersten Variation der Bogenlänge folgt dann, dass zu  $\varepsilon > 0$  Kurven von  $\gamma(-\varepsilon)$  nach  $\gamma(\varepsilon)$  existieren, deren Länge kürzer ist, als die von  $\gamma|_{[-\varepsilon, \varepsilon]}$ . Daher ist die Differenz  $D := L(\gamma|_{[-\varepsilon, \varepsilon]}) - d^M(\gamma(-\varepsilon), \gamma(\varepsilon))$  positiv. Wir wählen nun  $n \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $d^M(c_1(t_n), c_2(s_n)) < D/2$  gilt, und können, da  $c_2$  minimal ist, folgern

$$\begin{aligned} d^M(c_1(-\varepsilon), c_1(t_n)) &\leq d^M(\gamma(-\varepsilon), \gamma(\varepsilon)) + d^M(\gamma(\varepsilon), \gamma(s_n)) + d^M(c_1(s_n), c_2(t_n)) \\ &< L(\gamma|_{[-\varepsilon, \varepsilon]}) - D + L(\gamma|_{[\varepsilon, s_n]}) + D/2 \\ &= L(c_1|_{[-\varepsilon, 0]}) + L(c_2|_{[0, s_n]}) - D/2 \\ &< L(c_1|_{[-\varepsilon, 0]}) + L(c_1|_{[0, t_n]}) = L(c_1|_{[-\varepsilon, t_n]}). \end{aligned}$$

Somit kann  $c_1$  nicht minimal sein. □

Wir führen nun folgende zentrale Bezeichnung ein:

### 1.2.2 Definition

Wir bezeichnen eine Fläche  $S \subset M$  als *beschränkten, minimal berandeten Streifen*, kurz *(bmb)-Streifen*, falls

1.  $S$  homöomorph zu  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  ist
2. zwei disjunkte, minimale Geodätische  $c_1, c_2 : \mathbb{R} \rightarrow M$  existieren, so dass der Rand von  $S$  deren Vereinigung ist
3.  $F(S) < \infty$ .

Beispiele für beschränkte, minimal berandete Streifen existieren unter anderem auf Riemannschen Überlagerungen von bestimmten 2-Tori. Diesen Fall betrachten wir in Kapitel 2.6 genauer.

Um die Parametrisierung der berandenden Kurven geeignet zu wählen, definieren wir:

### 1.2.3 Definition

Sei  $S \subset M$  ein (bmb)-Streifen und  $c_1, c_2 : \mathbb{R} \rightarrow M$  disjunkte minimale Geodätische, so dass  $\partial S = c_1 \cup c_2$ . So heißen die Kurven  $c_1, c_2$  Randgeodätische, falls

1.  $c_1$  so parametrisiert ist, dass für das Einheitsnormalenfeld  $N_1 : \mathbb{R} \rightarrow TM$  auf  $c_1$ , das bezüglich  $S$  nach innen zeigt,  $(\dot{c}_1(t), N_1(t))$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  positiv orientiert ist
2.  $c_2$  so parametrisiert ist, dass für das Einheitsnormalenfeld  $N_2 : \mathbb{R} \rightarrow TM$  auf  $c_2$ , das bezüglich  $S$  nach innen zeigt,  $(\dot{c}_2(t), N_2(t))$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  negativ orientiert ist

## 1.3 Birkhoff'scher Verkürzungsprozess

Der nun vorgestellte Verkürzungsprozess geht auf Birkhoff [Bir17] zurück. Die Formulierung entspricht im wesentlichen der Darstellung in [Kli95, S.338 ff], wobei dort jedoch geschlossene Kurven auf einer kompakten Mannigfaltigkeit betrachtet werden. Die Änderungen sind notwendig, um im Folgenden die hier vorgestellte Version des Birkhoffschen Verkürzungsprozesses auf kompakte Segmente von Kurven anzuwenden, die in (bmb)-Streifen  $S$  abgebildet werden. Es wird die zentrale Aufgabe in Kapitel 2 sein, dieses Verfahren auf Kurven  $\gamma$  zu verallgemeinern, die von ganz  $\mathbb{R}$  in einen solchen (bmb)-Streifen abbilden.

Sei  $C^0(I, M)$  die Menge der stetigen Abbildungen  $c : I = [0, 1] \rightarrow M$  versehen mit der Metrik

$$d_\infty(c, c') := \sup_{t \in I} d^M(c(t), c'(t)).$$

Somit ist  $C^0(I, M)$  ein vollständiger metrischer Raum. Zu einer kompakten Teilmenge  $N \subset M$  bezeichne  $PN$  den Unterraum der stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Kurven, deren Endpunkte in  $N$  liegen. Für Kurven mit durch  $\kappa > 0$  beschränkter Energie  $P^\kappa N := \{c \in PN \mid E(c) \leq \kappa\}$ , können wir nun mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die Länge abschätzen:

$$L(c)^2 = \left( \int_0^1 |\dot{c}(t)| dt \right)^2 \leq \int_0^1 |\dot{c}(t)|^2 dt = 2E(c) \leq 2\kappa. \quad (1.2)$$

Mit Gleichheit genau dann, wenn die Kurve  $c$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Insbesondere folgt aus Ungleichung (1.2), dass das Bild der Kurven aus  $P^\kappa N$  in  $\overline{\mathcal{B}_{\sqrt{2\kappa}}(N)}$  liegt.

Sei nun  $k \in \mathbb{N}$  so groß, dass für  $\eta := \text{inj}_M(\overline{\mathcal{B}_{\sqrt{2\kappa}}(N)}) > 0$  (vgl. auch Abschnitt 1.5) gilt:

$$k \geq \frac{8\kappa}{\eta^2}.$$

So folgt wie oben für alle  $t \in [0, 1 - 1/k]$ :

$$\begin{aligned} (d(c(t), c(t + 1/k)))^2 &\leq (L(c|_{[t, t+1/k]}))^2 \\ &\leq 2\frac{1}{k}E(c|_{[t, t+1/k]}) < \frac{2\kappa}{k} \leq \frac{\eta^2}{4}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Auf diese Segmente können wir folgendes Lemma anwenden:

**1.3.1 Lemma ( [Kli95, 3.7.1 ] )**

Sei  $\tilde{N}$  eine kompakte Teilmenge von  $M$  und  $(c_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Folge von stückweise stetig differenzierbaren Kurven  $c_m : [0, 1] \rightarrow M$  mit Endpunkten in  $\tilde{N}$ . Bezeichne  $p_m := c_m(0)$ ,  $q_m := c_m(1)$  und nehmen wir an, dass  $d^M(p_m, q_m) \leq \text{inj}_M(\tilde{N})/2 \quad \forall m \in \mathbb{N}$ .

Falls  $\{E(c_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$  und  $\{d^M(p_m, q_m)^2/2\}$  beide gegen denselben Grenzwert  $a > 0$  konvergieren, so existiert eine konvergente Teilfolge von  $(c_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , deren Limes ein geodätisches Segment  $c : [0, 1] \rightarrow M$  mit Endpunkten in  $\tilde{N}$  ist.

BEWEIS:

Nach Fakt 1.2.1 existiert eine Folge  $(\gamma_{p_m q_m})_{m \in \mathbb{N}}$  von minimalen Segmenten von

$p_m$  nach  $q_m$  definiert auf  $[0, 1]$ . Diese ist auch eindeutig, da die Punkte  $p_m, q_m$  in  $\tilde{N}$  liegen und der Abstand der Punkte kleiner als der Injektivitätsradius von  $\tilde{N}$  ist. Aufgrund der Kompaktheit existiert außerdem eine Teilfolge, die wir auch  $(c_m)_{m \in \mathbb{N}}$  nennen, so dass die Grenzwerte  $p = \lim_{m \rightarrow \infty} p_m$  und  $q = \lim_{m \rightarrow \infty} q_m$  existieren. Somit folgt, dass  $\gamma_{p_m q_m}$  gegen das eindeutig bestimmte minimale Segment  $\gamma_{pq}$  konvergiert.

Um zu zeigen, dass für eine geeignete Teilfolge  $\lim_{m \rightarrow \infty} d_\infty(c_m, \gamma_{p,q}) = 0$  gilt, wählen wir für alle  $m \in \mathbb{N}$  ein  $t_m \in [0, 1]$ , so dass  $d^M(c_m(t_m), \gamma_{pq}(t_m)) = \max_{t \in [0,1]} d^M(c_m(t), \gamma_{p,q}(t))$ . Sei nun  $c_m$  eine Teilfolge, für die die Grenzwerte  $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = t_0$  und  $\lim_{m \rightarrow \infty} c_m(t_m) = r$  existieren. Wir können o.E. annehmen, dass  $t_0 \in (0, 1)$ , da die Aussage sonst klar ist. Sei nun  $r_m := c_m(t_m)$ , so existieren für alle  $m \in \mathbb{N}$  im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmte minimale Segmente  $\gamma_{p_m r_m}$  und  $\gamma_{r_m q_m}$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} E(\gamma_{pr}) + E(\gamma_{rq}) &= \lim_{m \rightarrow \infty} (E(\gamma_{p_m r_m}) + E(\gamma_{r_m q_m})) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} (E(c_m|_{[0,t_m]}) + E(c_m|_{[t_m,1]})) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} E(c_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} E(\gamma_{p_m q_m}) = E(\gamma_{pq}) \end{aligned}$$

Da  $\gamma_{pq}$  das eindeutig bestimmte minimale Segment  $\gamma_{pq} : [0, 1] \rightarrow M$  von  $p$  nach  $q$  ist, das  $E$  minimiert, folgt somit, dass die aus  $\gamma_{pr}$  und  $\gamma_{rq}$  zusammengesetzte Kurve mit  $\gamma_{pq}$  übereinstimmt und speziell  $r = \gamma_{pq}(t_0)$ .  $\square$

Nun definieren wir den Birkhoffschen Verkürzungsprozess auf  $P^\kappa N$ :

### 1.3.2 Definition

Sei  $\kappa > 0$  und  $k \in \mathbb{N}$  gerade, so dass  $k \geq \frac{16\kappa}{(\text{inj}_M(\overline{\mathcal{B}}_{2\sqrt{2\kappa}}(N)))^2}$  erfüllt ist. Es sei  $D_0 = \text{id}|_{P^\kappa N}$  und für  $\sigma \in (0, 2 - \frac{2}{k}]$  definieren wir  $D_\sigma : P^\kappa N \rightarrow P^\kappa N$ , falls für ein  $j \in \{0, 2, \dots, k-2\}$  gilt  $\sigma \in (\frac{j}{k}, \frac{j+2}{k}]$ , durch

$$D_\sigma c(t) = \begin{cases} c(t) & \forall t \in [0, 1] \setminus [\frac{j}{k}, \sigma] \\ \gamma_{c(\frac{j}{k})c(\sigma)}(t) & \forall t \in [\frac{j}{k}, \sigma] \end{cases},$$

und falls für ein  $j \in \{0, 2, \dots, k-4\}$  gilt  $\tilde{\sigma} := \sigma - 1 \in (\frac{j}{k}, \frac{j+2}{k}]$ , durch

$$D_\sigma c(t) = \begin{cases} c(t) & \forall t \in [0, 1] \setminus [\frac{j+1}{k}, \tilde{\sigma} + \frac{1}{k}] \\ \gamma_{c(\frac{j+1}{k})c(\tilde{\sigma} + \frac{1}{k})}(t) & \forall t \in [\frac{j+1}{k}, \tilde{\sigma} + \frac{1}{k}] \end{cases}.$$

Wir definieren nun für  $\sigma \in [0, 2 - \frac{2}{k}]$  die Abbildung  $D(\sigma, \cdot) : P^\kappa N \rightarrow P^\kappa N$

durch die Verkettung der Abbildungen  $D_0, D_{\frac{2}{k}}, \dots, D_{\frac{2l}{k}}, D_\sigma$ , wobei  $2l$  die gerade Zahl bezeichnet, die durch  $2l \leq k\sigma < 2l + 2$  bestimmt ist.

Da nach Ungleichung (1.2) je zwei Punkte  $c(s), c(t)$  einer beliebigen Kurve  $c \in P^\kappa N$  in  $\overline{\mathcal{B}_{\sqrt{2\kappa}}(N)}$  liegen und ihr Abstand, falls  $|t-s| \leq \frac{2}{k}$  ist, wie in (1.3) durch den halben Injektivitätsradius abgeschätzt werden kann, sind die Abbildungen  $D_\sigma$ ,  $\sigma \in [0, 2 - 2/k]$  wohldefiniert. Außerdem halten die Abbildungen  $D_{\frac{j}{k}}$  die Kurve  $c$  auf  $[0, 1] \setminus [j/k, (j+2)/k]$  für  $j \in \{0, 2, \dots, k\}$  fest, und somit ist auch die Verknüpfung  $D_{\frac{k-2}{k}} \circ \dots \circ D_{\frac{2l}{k}} \circ D_\sigma$  für  $\sigma \leq 1$  wohldefiniert. Insbesondere liegt das Bild der Kurven  $D_{\frac{k-2}{k}} \circ \dots \circ D_{\frac{2}{k}}(c)$  in  $\overline{\mathcal{B}_{2\sqrt{2\kappa}}(N)}$ , da nach einer groben Abschätzung auch die Länge jedes Segments  $c|_{[\frac{j}{k}, \frac{j+2}{k}]}$  durch  $\sqrt{2\kappa}$  beschränkt ist. Und wir erhalten die Wohldefiniertheit der Abbildung  $D(\sigma, \cdot)$  mit demselben Argument für  $\sigma \in [1, 2 - 2/k]$ .

### 1.3.3 Lemma

Sei  $\kappa > 0$  fest. Die Abbildung  $D : [0, 2 - 2/k] \times P^\kappa N \rightarrow P^\kappa N$ ;  $(\sigma, c) \mapsto D(\sigma, c)$  ist stetig und für jedes  $c \in P^\kappa N$  ist  $\sigma \in [0, 2 - 2/k] \mapsto E(D(\sigma, c)) \in \mathbb{R}$  eine monoton fallende Funktion, die genau dann konstant ist, wenn  $c$  ein geodätisches Segment oder eine Punktkurve ist.

BEWEIS:

Sei  $(c_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset P^\kappa N$  eine konvergente Folge mit Grenzwert  $c$  und  $(\sigma_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset [0, 2 - 2/k]$  eine konvergente Folge mit Grenzwert  $\sigma$ . Wir zeigen zunächst, dass  $\lim_{m \rightarrow \infty} D_{\sigma_m}(c_m) = D_\sigma(c)$ :

Sei dazu  $2l$  diejenige gerade Zahl mit  $2l < k\sigma \leq 2l + 2$ , so folgt

$$\begin{aligned} d^M(c_m(2l/k), c(2l/k)) &\rightarrow 0 \\ d^M(c_m(\sigma_m), c(\sigma)) &\leq d^M(c_m(\sigma_m), c(\sigma_m)) + d^M(c(\sigma_m), c(\sigma)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Falls  $2l < k\sigma_m \leq 2l + 2$ , folgt sofort, dass dann auch die Segmente  $c_m|_{[2l/k, \sigma_m]}$  gegen  $c|_{[2l/k, \sigma]}$  konvergieren. Sonst ist o.E.  $\sigma = 2l + 2$ , dann konvergieren jedoch die Segmente  $c_m|_{[(2l+2)/k, \sigma_m]}$  gegen den Punkt  $c(2l+2)/k$  und somit folgt auch in diesem Fall die Behauptung.

Es folgt nun sofort, dass die Abbildungen  $D_{\frac{2}{k}}, \dots, D_{\frac{k-4}{k}}$  stetig sind. Seien erneut die Bezeichnungen und  $l$  so wie oben gewählt. Wir können o.E. annehmen, dass  $k\sigma_m > 2l$ . Dann folgt, da endlich viele Verknüpfungen stetiger

Abbildungen auch wieder stetig sind:

$$\begin{aligned}
 D(\sigma, c) &= D_\sigma \circ D_{\frac{2l}{k}} \circ \cdots \circ D_{\frac{2}{k}} \left( \lim_{m \rightarrow \infty} c_m \right) \\
 &= D_\sigma \left( \lim_{m \rightarrow \infty} D_{\frac{2l}{k}} \circ \cdots \circ D_{\frac{2}{k}}(c_m) \right) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} D_{\sigma_m} \left( D_{\frac{2l}{k}} \circ \cdots \circ D_{\frac{2}{k}}(c_m) \right) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} D(\sigma_m, c_m)
 \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Funktion  $\sigma \mapsto E(D(\sigma, c))$  für festes  $c \in P^\kappa N$ . Diese fällt monoton, da für  $\sigma_1 < \sigma_2$  die Kurve  $D(\sigma_2, c)$  aus der Kurve  $D(\sigma_1, c)$  hervorgeht, indem man Segmente durch minimale Segmente ersetzt.

Weiterhin ist, falls  $c$  ein geodätisches Segment oder eine Punktkurve ist, die Abbildung  $D(\sigma, c)$  konstant und somit auch  $E(D(\sigma, c))$ . Nehmen wir nun an, dass  $E(D(2, c)) = E(c)$  und  $c$  keine Punktkurve ist, so folgt dass die Einschränkung der Kurve  $c$  auf die Intervalle  $[j/k, (j+2)/k]$ ,  $j \in \{0, 2, \dots, k-2\}$ , und  $[(j+1)/k, (j+3)/k]$ ,  $j \in \{0, 2, \dots, k-4\}$  geodätische Segmente sind, die proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind. Daher folgt die Behauptung.  $\square$

Das nun folgende Lemma ist essentiell, um mit Hilfe des Birkhoff'schen Verkürzungsprozess, die Existenz von Geodätischen zu zeigen. Wie später noch ausgeführt wird, kann man auch alternativ formulieren: Das Energiefunktional erfüllt auf  $PN$  die Palais-Smale-Bedingung.

**1.3.4 Lemma** [Kli95, Lemma 3.7.6]

Wähle  $\kappa > 0$  und bezeichne  $D(2 - 2/k, \cdot) : P^\kappa N \rightarrow P^\kappa N$  mit  $D$ . Sei weiterhin  $(c_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $P^\kappa N$ , so dass  $(E(c_m))_{m \in \mathbb{N}}$  und  $(E(Dc_m))_{m \in \mathbb{N}}$  beide konvergieren und denselben Grenzwert  $\kappa_0 > 0$  besitzen. Dann besitzt  $(c_m)$  eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert  $\tilde{c}$  eine Geodätische mit Energie  $E(\tilde{c}) = \kappa_0$  ist.

BEWEIS:

Sei  $D^1 = D(1, \cdot)$ , so gilt aufgrund der Monotonie-Eigenschaft von  $D(\sigma, \cdot)$  auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(D^1(c_m)) = \kappa_0$ .  $D^1(c_m)$  besteht nun aus  $\frac{k}{2}$  geodätischen Segmenten mit Endpunkten in  $\overline{\mathcal{B}_{\sqrt{2\kappa}}(N)}$ . Nach Proposition 1.3.1 existiert dann auch eine Teilfolge, so dass  $c_m$  und  $D^1 c_m$  gegen denselben geodätischen Polygonzug konvergieren. Wiederholen wir dieses Argument für die Teilfolgen  $D^1 c_m$  und  $Dc_m$ , die in  $\overline{\mathcal{B}_{2\sqrt{2\kappa}}(N)}$  liegen, so erhalten wir eine Teilfolge von  $c_m$ , so dass  $Dc_m$  und  $D^1 c_m$ , somit aber auch  $c_m$ , gegen ein geodätisches Segment  $\tilde{c}$



konvergieren. Nun gilt, da geodätische Segmente proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind:

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{c}) &= E(\tilde{c}|_{[0, \frac{1}{k}]}) + \sum_{j=0}^{k-4} E(\tilde{c}|_{[\frac{j+1}{k}, \frac{j+3}{k}]}) + E(\tilde{c}|_{[\frac{k-1}{k}, 1]}) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( E(c_m|_{[0, \frac{1}{k}]}) + \sum_{j=0}^{k-4} E(c_m|_{[\frac{j+1}{k}, \frac{j+3}{k}]}) + E(c_m|_{[\frac{k-1}{k}, 1]}) \right) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} E(D(c_m)) = \kappa_0.
 \end{aligned}$$

□

### 1.3.5 Lemma

Sei  $0 < \kappa_0 \leq \kappa$  und  $C := \{c \in P^\kappa N \mid c \text{ geodätisches Segment und } E(c) = \kappa_0\}$ . So existiert zu jeder offenen Umgebung  $U$  von  $C$ , ein  $\varepsilon = \varepsilon(U) > 0$ , so dass

$$D(E^{-1}([0, \kappa_0 + \varepsilon])) \subset U \cup E^{-1}([0, \kappa_0 - \varepsilon]).$$

BEWEIS:

Da  $D|_C = id_{P^\kappa N}$ , existiert eine offene Umgebung  $U' \subset U$  von  $C$ , so dass  $D(U') \subset U$ . Nehmen wir an, dass kein solches  $\varepsilon > 0$  existiert, so finden wir eine Folge  $c_n$  mit  $c_n \notin U'$ , so dass

$$\kappa_0 + \frac{1}{n} > E(c_n) \geq E(D(c_n)) \geq \kappa_0 - \frac{1}{n}.$$

Mit Lemma 1.3.4 folgt nun, dass eine konvergente Teilfolge existiert, deren Limes  $\tilde{c}$  in  $C$  liegt. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu  $c_n \notin U'$ . □

Eine einfache Anwendung folgt im nächsten Abschnitt.

## 1.4 Konvexität von (bmb)-Streifen

Sei  $S$  ein (bmb)-Streifen in  $M$  und  $c_1, c_2$  Randgeodätische von  $S$ , so existieren zu je zwei Punkten aus  $S$  auch ein minimales geodätisches Segment, das die beiden Punkte verbindet (vgl. 1.2.1). Ist  $M \setminus S$  nicht zusammenhängend, so zeigt ein einfaches Minimalitätsargument, dass dieses Segment vollständig in  $S$  verläuft, insbesondere gilt somit  $d^S = d|_{S \times S}$ , wobei für  $p, q \in S$

$$d^S(p, q) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow S \text{ stw. differenzierbar, } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}.$$

Weiterhin sei auch der Abstand zweier Teilmenge  $A, B \subset S$  definiert durch:

$$d^S(A, B) := \inf_{\substack{p \in A \\ q \in B}} d^S(p, q)$$

Im allgemeinen Fall ist es nicht mehr richtig, dass das minimale Segment in  $S$  verläuft. Es stellt sich nun die Frage, ob der Abstand  $d^S$  zweier Punkte durch ein geodätisches Segment realisiert wird. Dazu führen wir folgende Bezeichnung ein:

**1.4.1 Definition**

1. Ein geodätisches Segment  $\gamma : [a, b] \rightarrow S$  heißt *S-minimales Segment*, wenn  $L(\gamma) = d^S(\gamma(a), \gamma(b))$ .
2.  $S$  ist *konvex bezüglich  $d^S$*  genau dann, wenn zu je zwei Punkten  $p, q \in S$  ein  $S$ -minimales Segment  $\gamma : [0, d^S(p, q)] \rightarrow S$  existiert, das  $p$  und  $q$  verbindet.

**1.4.2 Bemerkung** Jedes Segment von  $c_1$  bzw.  $c_2$  ist auch ein  $S$ -minimales Segment.

**1.4.3 Lemma**  $S$  ist konvex bezüglich  $d^S$ .

BEWEIS:

Seien  $p, q \in S$  fest gewählt, so existiert eine Folge von stückweise stetig differenzierbaren Kurven  $\gamma_n : [a_n, b_n] \rightarrow S$ , so dass  $\gamma_n(a_n) = p$  und  $\gamma_n(b_n) = q$  und  $L(\gamma_n) \rightarrow d^S(p, q)$ . O.E. können wir annehmen, dass die Kurven proportional zur Bogenlänge auf  $[0, 1]$  parametrisiert sind. Dann gilt  $E(\gamma_n) = \frac{1}{2}L(\gamma_n)^2 \rightarrow \frac{1}{2}d^S(p, q)^2$ . Für ausreichend großes  $N \in \mathbb{N}$  gilt dann

$$E(\gamma_n) \leq \frac{1}{2}d^S(p, q)^2 + 1 =: \kappa \quad \forall n \geq N \quad (1.4)$$

Definiere  $\tilde{N} := \{p, q\}$  und  $B_{\tilde{N}} := \mathcal{B}_{2\sqrt{\kappa}}(\tilde{N})$ . Zu  $\eta := \frac{1}{2} \min\{d^M(c_1 \cap \overline{B_{\tilde{N}}}, c_2 \cap \overline{B_{\tilde{N}}}), \text{inj}_M(\overline{B_{\tilde{N}}})\} > 0$  und einer geraden, natürlichen Zahl  $k > 16\kappa/\eta^2$  bezeichnen  $D = D(2 - 2/k, \cdot) : P^\kappa \tilde{N} \rightarrow P^\kappa \tilde{N}$  den Birkhoffsche Verkürzungsprozess aus Definition 1.3.2. Insbesondere liegen die Kurven  $D(\gamma_n)$  in  $S$ . Denn schätzen wir ab wie in Ungleichung (1.3), so folgt für alle  $t \in [0, 1 - 2/k]$

$$d^M(\gamma_n(t), \gamma_n(t + 2/k)) \leq \eta.$$

Somit ist für ein festes  $n \geq N$  und  $t \in [0, 2 - 2/k]$  das minimale Segment  $a = \gamma_{\gamma_n(t), \gamma_n(t+2/k)}$  eindeutig bestimmt, da die Endpunkte in  $B_{\tilde{N}}$  enthalten

sind. Da die Endpunkte auch in  $S$  liegen, besitzt es, aufgrund der Minimalität, mit  $c_1$  und  $c_2$  jeweils höchstens einen Schnittpunkt. Läge nun ein Punkt von  $a$  außerhalb von  $S$ , so existierten mindestens zwei Schnittpunkte von  $a$  mit dem Rand von  $S$ , insbesondere stellt dann ein Segment von  $a$  eine Verbindung von  $c_1 \cap \overline{B_{\tilde{N}}}$  mit  $c_2 \cap \overline{B_{\tilde{N}}}$  dar im Widerspruch zu

$$L(a) = d^M(\gamma_n(t), \gamma_n(t + 2/k)) \leq \eta < d^M(c_1 \cap \overline{B_{\tilde{N}}}, c_2 \cap \overline{B_{\tilde{N}}}).$$

Die Kurven  $D(\gamma_n) : [0, 1] \rightarrow S$  erfüllen für alle  $n \geq N$  die Bedingung

$$E(D(\gamma_n)) \leq E(\gamma_n) \rightarrow \frac{d^S(p, q)^2}{2}.$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung erhalten wir für alle Kurven  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ :

$$L(\gamma)^2 = \left( \int_0^1 |\dot{\gamma}_n(t)| dt \right)^2 \leq \int_0^1 |\dot{\gamma}_n(t)|^2 dt = 2E(\gamma)$$

und es folgt

$$\frac{d^S(p, q)^2}{2} \leq E(D(\gamma_n)) \leq E(\gamma_n) \rightarrow \frac{d^S(p, q)^2}{2}.$$

Mit Lemma 1.3.4 folgt nun die Existenz einer konvergenten Teilfolge, deren Grenzwert  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  ein geodätisches Segment mit  $L(\gamma) = d^S(p, q)$  ist.  $\square$

**1.4.4 Folgerung** *Seien  $p, q \in S$  und  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, d^S(p, q)] \rightarrow S$  zwei  $S$ -minimale Segmente von  $p$  nach  $q$ . Dann sind  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  gleich oder es existiert keine Fortsetzung eines der beiden Segment zu einem geodätischen Segment in  $S$ , so dass die Fortsetzung auch ein  $S$ -minimales Segment darstellt.*

*Insbesondere folgt: Liegen beide Endpunkte eines  $S$ -minimalen Segments  $\gamma$  auf derselben Randgeodätischen, so ist  $\gamma$  bereits (bis auf Parametrisierung) ein Segment dieser Randgeodätischen.*

BEWEIS:

Sei  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ,  $a := d^S(p, q)$  und  $\varepsilon > 0$ , so dass die Fortsetzung  $\gamma_2 : [0, a + \varepsilon] \rightarrow S$  in  $S$  verläuft, so ist durch

$$\tilde{\gamma}(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \forall t \in [0, a] \\ \gamma_2(t) & \forall t \in [a, a + \varepsilon] \end{cases}$$

eine Kurve  $\tilde{\gamma} : [0, a + \varepsilon] \rightarrow S$  definiert, die an der Stelle  $a$  nicht differenzierbar ist. Sei nun  $0 < \delta < \varepsilon$  so klein, dass  $\mathcal{B}_{4\delta}(q)$  höchstens eine Randkomponente

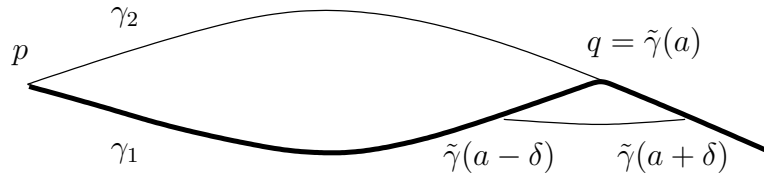


Abbildung 1.2: Schnitte von  $S$ -minimalen Segmenten

von  $\partial S$  schneidet. Solch ein  $\delta$  existiert, da die Randgeodätischen disjunkt sind. Wegen  $d^M(\tilde{\gamma}(a - \delta), \tilde{\gamma}(a + \delta)) \leq 2\delta$ , liegt das ( $M$ -)minimale Segment von  $\tilde{\gamma}(a - \delta)$  nach  $\tilde{\gamma}(a + \delta)$  vollständig in  $S$ , da es sonst eine der beiden Randgeodätischen zweimal schneidet im Widerspruch zu 1.2.1.

Dann folgt jedoch  $d^S(\tilde{\gamma}(a - \delta), \tilde{\gamma}(a + \delta)) = d^M(\tilde{\gamma}(a - \delta), \tilde{\gamma}(a + \delta))$  und nach der ersten Variation der Bogenlänge  $D := L(\tilde{\gamma}|_{[a - \delta, a + \delta]}) - d^M(\tilde{\gamma}(a - \delta), \tilde{\gamma}(a + \delta)) > 0$ . Nun können wir schließen

$$\begin{aligned}
 d^S(\gamma_2(0), \gamma_2(a + \varepsilon)) &\leq L(\tilde{\gamma}|_{[0, a - \delta]}) + d^S(\tilde{\gamma}(a - \delta), \tilde{\gamma}(a + \delta)) + L(\tilde{\gamma}|_{[a + \delta, a + \varepsilon]}) \\
 &= L(\tilde{\gamma}|_{[0, a + \varepsilon]}) - D \\
 &= L(\gamma_1|_{[0, a]}) + L(\gamma_2|_{[a, a + \varepsilon]}) - D \\
 &= L(\gamma_2|_{[0, a]}) + L(\gamma_2|_{[a, a + \varepsilon]}) - D \\
 &< L(\gamma_2|_{[0, a + \varepsilon]})
 \end{aligned}$$

Somit kann  $\gamma_2|_{[0, a + \varepsilon]}$  kein  $S$ -minimales Segment sein.  $\square$

## 1.5 Der Injektivitätsradius

Der Injektivitätsradius ist nach Definition die kleinste obere Schranke für den Abstand von  $p$  zu einem Schnittpunkt zweier Geodätischer, die bei  $p$  starten. Die Exponentialabbildung ist ein lokaler Diffeomorphismus. Daher ist  $\text{inj}_M(p) > 0$  für alle  $p \in M$ . Da der Injektivitätsradius stetig vom Punkt abhängt (vgl. [Kli95, Prop. 2.1.10]), folgt somit auch für jede kompakte Teilmenge  $K \subset M$ , dass der Injektivitätsradius  $\text{inj}_M(K) := \inf_{p \in K} \text{inj}_M(p)$  positiv ist. Während der Konjugationsradius aufgrund der Krümmungsschranke durch  $\frac{\pi}{2\sqrt{R}}$  nach unten abgeschätzt werden kann (vgl. dazu z.B. [Pet98, Thm.3.5]), sind Krümmungsschranken im Allgemeinen nicht hinreichend, um den Injektivitätsradius nach unten durch eine positive Konstante zu beschränken. Zum Beispiel lassen sich auf  $\mathbb{R}^2$  Metriken definieren, so dass der Injektivitätsradius beliebig klein wird: Eine Folge von sogenannten „big-bumps“, deren „Hälse“ beliebig eng werden, vergleiche dazu die Definition nach Theorem 2.6.2, können

trotz beliebigen Krümmungsschranken konstruiert werden. Mit Hilfe des Birkhoff'schen Verkürzungsprozess kann man sich leicht überlegen, dass dann auch beliebig kurze geodätische Schleifen (sogar geschlossene Geodätische) existieren.

Im folgenden werden wir unsere Untersuchungen auf (bmb)-Streifen konzentrieren und mit Hilfe der Oberflächenschranke zeigen, dass auf einem solchen Streifen das eben beschriebene Phänomen nicht auftreten kann.

Sei nun  $S \subset M$  ein fest gewählter (bmb)-Streifen. Zu  $p \in S$  sei

$$A_p := \{v \in T_p M \mid c_v([0, 1]) \subset S\}.$$

Der *Injektivitätsradius von  $p$  in  $S$*  sei dann definiert durch

$$\text{inj}_S(p) := \sup\{\rho > 0 \mid \exp_p|_{\mathcal{B}_\rho(0_p) \cap A_p} \text{ ist injektiv}\}.$$

Für eine Teilmenge  $K \subset S$  sei außerdem

$$\text{inj}_S(K) := \inf_{p \in K} \text{inj}_S(p).$$

**1.5.1 Lemma** *Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow S$  ein geodätisches Segment von  $p$  nach  $q$  und gilt  $L(\gamma) \leq \text{inj}_S(p)$ , so ist  $\gamma$   $S$ -minimal.*

BEWEIS:

Sei zunächst  $L(\gamma) < \text{inj}_S(p)$ , so existiert nach Lemma 1.4.3 ein  $S$ -minimales Segment  $\tilde{\gamma}$  von  $p$  nach  $q$ . Aus  $L(\tilde{\gamma}) \leq L(\gamma) < \text{inj}_S(p)$  folgt dann nach Definition des Injektivitätsradius, dass die Geodätischen auch schon (bis auf Parametrisierung) gleich sind und somit die Behauptung.

Ist nun  $L(\gamma) = \text{inj}_S(p)$ , so ist  $L(\gamma|_{[a, b - \frac{1}{n}]}) < \text{inj}_S(p)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und somit  $(\gamma|_{[a, b - \frac{1}{n}]})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von  $S$ -minimal Segmenten, die gegen  $\gamma$  konvergieren. Insbesondere ist daher  $\gamma$   $S$ -minimal.  $\square$

**1.5.2 Lemma** *Seien  $p, q \in S$  und  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  ein  $S$ -minimales Segment von  $p$  nach  $q$ , das nicht (bis auf Parametrisierung) mit einem Segment einer Randgeodätischen übereinstimmt. Dann existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $v = \dot{\gamma}(0)$ , so dass  $\exp_p|_U$  ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung  $V$  von  $q$  ist und*

1.  $U \subset A_p$ , falls  $q \in \text{int}(S)$ .

2.  $(\exp_p|_U)^{-1}(V \cap S) \subset A_p$ , falls  $q \in \partial S$ .

BEWEIS:

Sei zunächst  $\tilde{U}$  eine beschränkte offene Umgebung von  $v$ , so dass  $\exp_p|_{\tilde{U}}$  ein Diffeomorphismus auf  $\tilde{V}$  ist. ZU 1: Da  $q \in \text{int}(S)$  und  $\gamma$  ein geodätisches Segment ist, liegt auch  $\gamma|_{[0,1]}$  in  $\text{int}(S)$ . Wir unterscheiden zwei Fälle: Entweder liegt auch  $p \in \text{int}(S)$ , dann ist  $\gamma|_{[0,1]}$  vollständig in  $\text{int}(S)$  enthalten. Da  $\exp$  stetig ist, existiert also eine offene Umgebung  $\gamma|_{[0,1]} \subset V \subset \bar{V} \subset \text{int}(S)$ . Dann existiert auch eine Umgebung  $U \subset \tilde{U}$  um  $v$ , so dass  $\gamma_w|_{[0,1]} \subset V$  für alle  $w \in U$ . Somit liegt  $U$  in  $A_p$ .

Sonst liegt  $p \in \partial S$ , sagen wir  $p \in c_2$ . Dann zeigt  $v$  bezüglich  $S$  nach innen. Bezeichne  $H^S \subset T_p M$  den offenen Halbraum der bezüglich  $S$  nach innen zeigenden Vektoren, so existiert eine offene Umgebung  $U \subset \tilde{U}$  um  $v$ , so dass  $\bar{U} \subset H^S$ . Sei nun  $M_{\tilde{U}} := \max_{w \in \bar{U}} |w|$  und  $\varepsilon := \frac{1}{2M_{\tilde{U}}} \min\{\text{inj}_M(p), d^M(p, c_1)\} > 0$ . Dann folgt aus

$$L(\gamma_w|_{[0,\varepsilon]}) = \varepsilon \cdot |w| \leq \frac{1}{2} \min\{\text{inj}_M(p), d^M(p, c_1)\}, \quad \forall w \in U,$$

dass die Segmente  $\gamma_w|_{[0,\varepsilon]}$  weder  $c_1$  schneiden, noch einen weiteren Schnittpunkt mit  $c_2$  besitzen und somit in  $S$  enthalten sind. Wie im ersten Fall können wir nun  $U$  so verkleinern, dass auch die Segmente  $\gamma_w|_{[\varepsilon,1]} \subset S$  für alle  $w \in U$ .

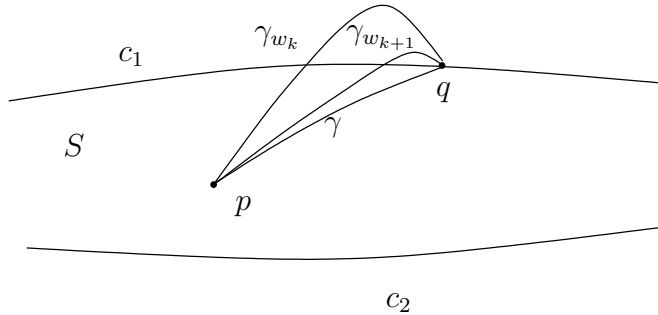


Abbildung 1.3:

ZU 2: Sei nun ohne Einschränkung  $q \in c_1$ . Wegen Folgerung 1.4.4 ist dann  $p \notin c_1$  und die Überlegungen aus dem ersten Teil, zeigen, dass zu beliebigem  $0 < \varepsilon < 1$  eine offene Umgebung  $U(\varepsilon) \subset \tilde{U}$  um  $v$  existiert, so dass  $\gamma_w|_{[0,1-\varepsilon]} \subset S$

für alle  $w \in U(\varepsilon)$ . Definiere

$$\min \left\{ 1, \frac{d^M(q, c_2)}{M_{\tilde{U}}} \right\} =: 2\varepsilon > 0, \quad (1.5)$$

wobei  $M_{\tilde{U}}$  wie oben definiert ist.

Wir argumentieren indirekt und nehmen an, dass in jedem ausreichend kleinen offenen Ball  $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(v) \subset U := U(\varepsilon)$  ein Tangentialvektor  $w_k$  existiert, so dass  $\exp_p(w_k) \in S$  und  $w_k \notin A_p$ .

Dann existieren offene Intervalle  $(t_k^a, t_k^e) \in (1 - \varepsilon, 1]$ , so dass  $\gamma_{w_k}|_{(t_k^a, t_k^e)} \subset M \setminus S$ . Da  $\exp_p(w_k) \rightarrow q$  und  $L(\gamma_{w_k}|_{[1-\varepsilon, 1]}) = \varepsilon \cdot |w_k| \leq \frac{1}{2}d^M(q, c_2)$  folgt dann für ausreichend große  $k$ , dass  $\gamma_{w_k}(t_k^a), \gamma_{w_k}(t_k^e) \in c_1$ . Sei nun  $t_k^a$  eine konvergente Teilfolge, so folgt aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion, dass der Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{w_k}(t_k^a)$  existiert. Wegen  $c_v \cap c_1 = \{q\}$  ist dieser dann schon  $q$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k^a = 1$ . Somit bilden die Segmente  $\gamma_{w_k}|_{(t_k^a, t_k^e)}$  mit entsprechenden Segmenten von  $c_1$  eine Folge von geodätischen Zwei-Ecken. Aus  $L(\gamma_{v_n}|_{(t_n^a, t_n^e)}) \leq L(\gamma_{v_n}|_{(t_n^a, 0)}) \rightarrow 0$  folgt dann aber ein Widerspruch zu  $\text{inj}_M(\mathcal{B}_1(q)) > 0$ .  $\square$

**1.5.3 Lemma** *Sei  $p \in S$  und  $\text{inj}_S(p) \leq \text{conj}_M(p) < \infty$ , so existiert eine geodätische Schleife  $\gamma : [0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow S$  mit Fußpunkt  $p$  und Länge  $L(\gamma) = 2 \text{inj}_S(p)$ .*

Der Beweis orientiert sich an [Kli95, Lemma 2.1.11]. In diesem Lemma wird eine ähnliche Aussage in Bezug auf den Injektivitätsradius  $\text{inj}_M$  gemacht.

BEWEIS:

Sei  $p \in S$  und  $\text{inj}_S(p) < \text{conj}_M(p) < \infty$ . So existieren Folgen  $(v_n)$  und  $(w_n)$  in  $A_p$ , so dass  $\exp_p(v_n) = \exp_p(w_n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\max\{|v_n|, |w_n|\} \rightarrow \text{inj}_S(p)$ . Da  $S$  abgeschlossen ist, ist insbesondere  $A_p$  abgeschlossen, und wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die Grenzwerte  $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$  und  $w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$  in  $A_p$  existieren. Es gilt  $\max\{|v|, |w|\} = \text{inj}_S(p) < \text{conj}(p)$ . Mit Lemma 1.5.1 folgt sofort  $|v| = |w| = d^S(p, q)$ , wobei

$$q := \exp_p(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_p(v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_p(w_n) = \exp_p(w).$$

Speziell existiert eine offene Umgebung  $U \subset T_p M$  um  $v$ , so dass  $\exp_p|_U$  ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Für ausreichend große  $n \in \mathbb{N}$  ist somit  $w_n \notin U$  und daher  $w \neq v$ . Die Verknüpfung der Kurven  $\gamma_v$  und  $\gamma_w(1 - \cdot)$  bildet somit eine Schleife  $\tilde{\gamma}$  in  $S$ . Es bleibt nun zu zeigen, dass  $\dot{\gamma}_v(1) = -\dot{\gamma}_w(1)$

und somit, dass die beiden geodätischen Segmente bereits eine geodätische Schleife bilden (vgl. dazu Abbildung 1.4).

Seien dazu  $v \in U$ ,  $q \in V = \exp_p(U)$  und  $w \in U'$ ,  $q \in V' = \exp_p(U')$  offene

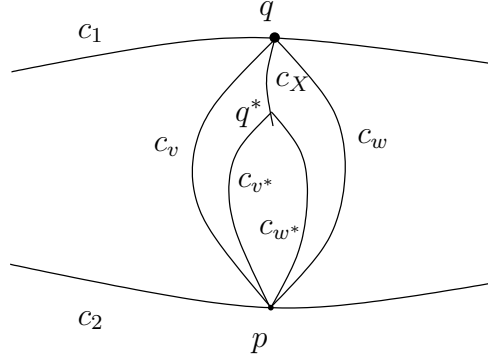


Abbildung 1.4:

Umgebungen wie in Lemma 1.5.2. O.E. sind  $U$  und  $U'$  disjunkt. Auf  $V$  und  $V'$  definieren

$$d(r) = |(\exp_p|_U)^{-1}(r)|^2 \text{ und } d'(r') = |(\exp_p|_{U'})^{-1}(r')|^2$$

Abstandsfunktionen von  $p$ . Mit dem Gaußlemma folgt nun für  $X \in T_qM$ :

$$Dd_q(X) = g(\dot{\gamma}_v(1), X); \quad Dd'_q(X) = g(\dot{\gamma}_w(1), X)$$

Unter der Annahme, dass  $\dot{\gamma}_v(1) \neq -\dot{\gamma}_w(1)$ , existiert ein  $X \in T_qM$ , so dass

$$Dd_q(X) = Dd'_q(X) < 0. \tag{1.6}$$

Im Fall, dass  $q$  auf  $\partial S$  liegt, zeigen  $-\dot{\gamma}_v(1), -\dot{\gamma}_w(1)$  bezüglich  $S$  nach innen. Sei nun  $X = -\dot{\gamma}_v(1) + \dot{\gamma}_w(1)$  so erfüllt  $X$  Bedingung (1.6), da  $|\dot{\gamma}_v(1)|^2 = |v|^2 = |w|^2 = |\dot{\gamma}_w(1)|^2$ , und zeigt bezüglich  $S$  nach innen.

Somit folgt für ausreichend kleine  $\delta > 0$ , dass  $q^* = \exp_q(\delta X) \in S \cap (V \cap V')$  enthalten ist. Für  $v^* := \exp_p^{-1}(q^*) \in A_p$  und  $w^* := \exp_p^{-1}(q^*) \in A_p$  gilt dann  $v^* \neq w^*$  und

$$\begin{aligned} |v^*| &= d(q^*) = d(q) + Dd_q(\delta X) + \dots < d(q) = d^S(q, p) \\ |w^*| &= d'(q^*) = d'(q) + Dd'_q(\delta X) + \dots < d'(q) = d^S(q, p), \end{aligned}$$

falls  $\delta$  klein genug. Nun folgt aus  $\max\{|v^*|, |w^*|\} < \text{inj}_S(p)$  der gewünschte Wi-



derspruch und nach geeigneter Umparametrisierung von  $\tilde{\gamma}$  die Behauptung.  $\square$

**1.5.4 Satz** Sei  $S$  ein (bmb)-Streifen, so ist  $\text{inj}_S(S)$  positiv.

Wir zitieren zunächst folgenden Spezialfall des Satzes von Gauß und Bonnet:

**1.5.5 Satz (geodätisches n-Eck (vgl. [Küh99], Folgerung 4.40.))**

Sei  $B \subset M$  homöomorph zur abgeschlossenen Kreisscheibe. Der Rand von  $B$  bestehe aus endlich vielen Stücken von Geodätischen mit Außenwinkeln  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Dann gilt:

$$\int_B K \, dF = 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

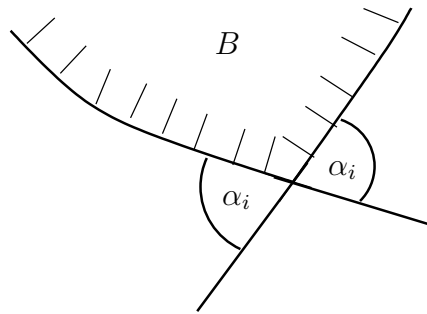


Abbildung 1.5: Außenwinkel des geodätischen n-Ecks

BEWEIS (VON SATZ 1.5.4):

Da der Konjugationsradius durch  $\text{conj}_M(p) \geq \frac{\pi}{2\sqrt{R}}$  beschränkt ist, folgt aus 1.5.3, dass zu allen  $p \in S$  mit  $\text{inj}_S(p) < \frac{\pi}{2\sqrt{R}}$  eine geodätische Schleife  $\gamma_p$  mit Fußpunkt  $p$  existiert, die vollständig in  $S$  liegt und deren Länge  $L(\gamma_p) = 2 \text{inj}_S(p)$  ist. Nehmen wir nun an, dass  $\text{inj}_S(S) < \frac{\pi}{2\sqrt{R}}$  und betrachten die Menge  $\Gamma := \{\gamma : [0, 1] \setminus \{0, 1\} \rightarrow S \mid L(\gamma) < \frac{\pi}{\sqrt{R}}\}$ . Wir können zwei Fälle unterscheiden:

Entweder existiert ein Kompaktum  $K \subset S$ , so dass alle geodätischen Schleifen aus  $\Gamma$  in  $K$  enthalten sind. In diesem Fall gilt

$$\text{inj}_S(S) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{2} L(\gamma) = \text{inj}_S(S \cap K) \geq \text{inj}_M(S \cap K) > 0.$$

Oder es existiert eine Folge von geodätischen Schleifen  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die paarweise disjunkt sind, wobei wir auch ausschließen möchten, dass eine der Schleifen, in

einer durch eine andere Schleife berandeten Menge enthalten ist. Die Schleifen  $\gamma_n$  sind nach Konstruktion einfach geschlossen. Da  $S$  homöomorph zu  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ , folgt dann aus dem Jordanschen Kurvensatz, dass jede Schleife  $\gamma_n$  eine Fläche  $A_n$  einschließt, die homöomorph zur offenen Kreisscheibe ist. Nun folgt mit 1.5.5 für jede dieser Schleifen

$$2\pi = \int_{A_n} K \, dF + \theta_n \leq R F(A_n) + \pi,$$

wobei  $\theta_n \in (-\pi, \pi)$  den Außenwinkel bezeichnet, den Anfangs- und Endvektor von  $\gamma_n$  bilden. Somit erhalten wir  $F(S) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} F(A_n) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\pi}{R}$  im Widerspruch zu  $F(S) < \infty$ .  $\square$

## 1.6 Fermikoordinaten

*Fermikoordinaten* werden folgendermaßen definiert: Sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische und  $N : \mathbb{R} \rightarrow TM$  ein Einheitsnormalenfeld auf  $c$ , so finden wir mit dem Satz über die Umkehrfunktion um jeden Punkt  $(t, 0) \in \mathbb{R}^2$  eine kleine Umgebung  $U$ , so dass

$$f : U \rightarrow M; \quad (t, s) \mapsto \exp_{c(t)}(sN(t))$$

ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Betrachtet man die Umkehrfunktion auf  $f(U)$ , so sind die Koordinatenlinien dieser Karte einerseits die auf  $c$  normalen nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen, und andererseits die Kurven mit konstantem Abstand von  $c$ .

In diesen Koordinaten besitzt die Metrik die einfache Form

$$G = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mit  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir können annehmen, dass  $(\dot{c}(t), N(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , positiv orientiert sind. Dann ist auch die so konstruierte Karte positiv orientiert und  $\alpha > 0$ . Für messbare Teilmengen  $A \subset f(U)$  ist dann wegen  $\sqrt{\det(G)} = \alpha(t, s)$  die Oberfläche durch

$$F(A) = \int_{f^{-1}(A)} \alpha \, d\lambda^2 \tag{1.7}$$

gegen. Hierbei bezeichnet  $\lambda^2$  das 2-dimensionale Lebesguemaß. Sie erfüllt für alle Punkte aus dem Definitionsbereich folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} \partial_s^2 \alpha(t, s) + K(f(t, s)) \alpha(t, s) &= 0 \\ \alpha(t, 0) &= 1 \\ \partial_s \alpha(t, 0) &= 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Die erste Gleichung ist eine Folgerung aus dem Theorema Egregium, während die anderen beiden sich direkt daraus ableiten lassen, dass  $c$  eine (nach Bogenlänge parametrisierte) Geodätische ist (vgl. z.B. [Küh99] S. 102 ff). Wir können die Lösung dieses Anfangswertproblems mit der Lösung für  $K \equiv R$  vergleichen und erhalten für alle  $s \in \left[0, \frac{\pi}{2\sqrt{R}}\right)$ :

$$\alpha(t, s) \geq \cos(\sqrt{R}s). \tag{1.9}$$

In der Tat: Bezeichnen wir die Lösung von (1.8) für  $K \equiv R$  mit  $\tilde{\alpha}(t, s) := \cos(\sqrt{R}s)$ . Da  $D \exp(\delta N(t))$  für  $\delta \in \left[0, \frac{\pi}{2\sqrt{R}}\right)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  nicht ausgeartet, können wir für festes  $t \in \mathbb{R}$  annehmen dann  $\{t\} \times \left[0, \frac{\pi}{2\sqrt{R}}\right) \subset U$ . Sei nun  $q(s) := \frac{\alpha(t, s)}{\tilde{\alpha}(t, s)}$  für alle  $s \in \left[0, \frac{\pi}{2\sqrt{R}}\right)$ . Wir bezeichnen nun mit „ $'$ “ die Ableitung nach  $s$ . Es gilt  $q(0) = 1$ . Daher genügt es zu zeigen, dass die Ableitung

$$q'(s) = \frac{\alpha'(t, s)\tilde{\alpha}(t, s) - \alpha(t, s)\tilde{\alpha}'(t, s)}{\tilde{\alpha}(t, s)^2}$$

nicht-negativ ist. Da der Nenner immer positiv ist, können wir uns darauf beschränken, den Zähler zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned} (\alpha'(t, s)\tilde{\alpha}(t, s) - \alpha(t, s)\tilde{\alpha}'(t, s))' &= \alpha''(t, s)\tilde{\alpha}(t, s) - \alpha(t, s)\tilde{\alpha}''(t, s) \\ &= (R - K(f(t, s)))\alpha(t, s)\tilde{\alpha}(t, s). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Aufgrund der Anfangsbedingungen können wir schließen, dass  $q$  in einer Umgebung um 0 monoton wächst. Speziell sind in dieser Umgebung  $\alpha$  und  $\tilde{\alpha}$  positiv.

Für jedes kompakte Intervall  $[0, \tilde{s}]$ ,  $\tilde{s} < s$  erhalten wir dann die Abschätzung auf dem ganzen Intervall in endlich vielen Schritten, und können daher schließen, dass sie für alle  $s \in \left[0, \frac{\pi}{2\sqrt{R}}\right)$  zutrifft.

Sei  $S \subset M$  erneut ein fest gewählter (bmb)-Streifen und  $c_1, c_2$  Randgeodätische von  $S$ . Unser Ziel ist es nun Fermikordinaten entlang  $c_1$  zu definieren: Sei dazu  $N : \mathbb{R} \rightarrow TM$  das Einheitsnormalenfeld entlang  $c_1$ , das bezüglich  $S$  nach innen zeigt. Zu positivem  $\varepsilon < \text{inj}_S(S)$  definieren wir folgende Abbildung

$$h_\varepsilon(t) := \begin{cases} \inf\{0 < s \leq \varepsilon \mid \exp_{c(t)}(sN(t)) \in c_2\}, & \text{falls definiert} \\ \varepsilon & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.11)$$

**1.6.1 Bemerkung** Im Folgenden sei durch  $\tilde{N}_t(s) := \exp(sN(t))$  das an der Stelle  $c_1(t)$  startende auf  $c_1$  normale geodätische Segment bezeichnet. Da  $\varepsilon < \text{inj}_S(S)$  existiert kein weiterer Schnittpunkt von  $\tilde{N}_t|_{[0, h_\varepsilon(t)]}$  mit  $c_1$ . Somit liegt  $\tilde{N}_t|_{[0, h_\varepsilon(t)]}$  vollständig in  $S$  und ist wegen Lemma 1.5.1 auch  $S$ -minimal.

**1.6.2 Lemma** Die Abbildung  $h_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow [0, \varepsilon]$  ist stetig.

BEWEIS:

Sei  $t \in \mathbb{R}$  fest und  $t_n \rightarrow t$  eine beliebige konvergente Folge in  $\mathbb{R}$ , so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_\varepsilon(t_n) = a$  existiert. Es bleibt zu zeigen, dass  $a = h(t)$ , denn dann folgt  $\liminf_{s \rightarrow t} h_\varepsilon(s) = \limsup_{s \rightarrow t} h_\varepsilon(s) = h(t)$ .

Das Segment  $\tilde{N}_t|_{[0, a]}$  Limes der  $S$ -minimalen Segmente  $\tilde{N}_{t_n}|_{[0, h_\varepsilon(t_n)]}$ . Da  $S$  abgeschlossen ist, ist  $\tilde{N}_t|_{[0, a]}$  in  $S$  enthalten und somit selbst  $S$ -minimal. Wegen Folgerung 1.4.4 schneidet  $\tilde{N}_t|_{[0, a]}$   $c_2$  höchstens einmal.

Falls eine Teilfolge  $(t_{n'})$  existiert, so dass die Endpunkte der geodätischen Segmente in  $c_2$  liegen, so folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{N}_{t_{n'}}(h_\varepsilon(t_{n'})) = \tilde{N}_t(a) \in c_2$ . Der Parameter  $a$  ist also die kleinste Schnittstelle von  $\tilde{N}_t$  mit  $c_2$  und wegen  $a \leq \varepsilon$  können wir schließen, dass  $h_\varepsilon(t) = a$  gilt.

Sonst können wir o.B.d.A annehmen, dass alle Segmente  $\tilde{N}_{t_n}|_{(0, h_\varepsilon(t_n))}$  im Innern von  $S$  enthalten sind. Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_\varepsilon(t_n) = \varepsilon$  und es genügt zu zeigen, dass die kleinste Schnittstelle von  $\tilde{N}_t$  mit  $c_2$  nicht kleiner als  $\varepsilon$  sein kann. Wir argumentieren indirekt und nehmen an, dass ein  $b < \varepsilon$  existiert, so dass  $\tilde{N}_t(b) \in c_2$ . Da sich zwei verschiedene Geodätische immer transversal schneiden, folgt dann jedoch schon, dass  $c_2$  auch  $\tilde{N}_{t_n}|_{(0, h_\varepsilon(t_n))}$  für ausreichend großes  $n \in \mathbb{N}$  schneidet, im Widerspruch zur Annahme, dass die Kurven im Innern von  $S$  verlaufen.  $\square$

**1.6.3 Satz** Es existiert ein  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , so dass für alle  $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$  auf  $D := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{t\} \times [0, h_\varepsilon(t)]$  die Abbildung

$$f : D \rightarrow M \\ (t, s) \mapsto \exp_{c(t)}(sN(t)),$$

ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist.

Der Beweis basiert auf folgender Beobachtung: Betrachten wir auf der Standardsphäre ein kurzes geodätisches Segment  $\gamma$  und zwei darauf senkrechte Geodätische  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , so schneiden sich diese Kurven im Nord- und im Südpol bezüglich des von  $\gamma$  definierten Äquators. Diese untere Schranke für den Abstand des ersten Schnittpunktes zu  $\gamma$  lässt sich auf Mannigfaltigkeiten mit beschränkter Gaußkrümmung übertragen. Wir beginnen mit folgendem Satz:

**1.6.4 Satz** *Seien  $a, b$  und  $c$  die Eckpunkte eines geodätischen Dreiecks auf  $S$ , dessen Seiten durch die nicht unbedingt eindeutigen  $S$ -minimalen Segmente  $ab, bc$  und  $ca$  gegeben sind. Sei weiterhin der Abstand je zweier Ecken kleiner als  $\frac{\pi}{2\sqrt{R}}$ . So besitzt  $abc$  höchstens einen rechten Winkel.*

Für den Vergleich mit der Sphäre  $S_r^2$  mit konstanter Krümmung  $R$  und Radius  $r := \frac{1}{\sqrt{R}}$  zitieren wir eine Folgerung des Rauchschen Vergleichssatz aus [Kli95, 2.7.3]:

**1.6.5 Satz** *Seien  $M, M^*$  Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$ . Außerdem gelte für die Schnittkrümmungen  $K$  und  $K^*$  von  $M$  und  $M^*$  die Bedingung  $K \leq K^*$ .*

*Wähle  $p \in M$  und  $p^* \in M^*$  und eine Kurve  $\tilde{b} = (\tilde{b}(s), s_0 \leq s \leq s_1)$  in  $T_p M$ . Seien  $I : T_p M \rightarrow T_{p^*} M^*$  eine Isometrie und  $\tilde{I}\tilde{b} = \tilde{b}^*$ . Dann sind  $b(s) = \exp_p \tilde{b}(s)$ ,  $b^*(s) = \exp_{p^*} \tilde{b}^*(s)$  Kurven in  $M$  bzw. in  $M^*$ . Nehmen wir an, dass die Exponentialabbildung  $\exp_{p^*}$  an den inneren Punkten des Segments  $\tilde{c}_s^*(t) = t\tilde{b}^*(s)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , regulär ist. Dann gilt  $L(b) \geq L(b^*)$ , d.h.  $b$  ist mindestens so lang wie  $b^*$ .*

Wir betrachten nun die  $S_r^2$  als Modellraum:

**1.6.6 Lemma** *Seien  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, \frac{\pi}{2}r) \rightarrow S_r^2$  nach Bogenlänge parametrisierte geodätische Segmente, deren Anfangsvektoren senkrecht aufeinander stehen, so gilt:*

$$d^{S_r^2}(\gamma_1(s), \gamma_2(t)) > \max\{s, t\} \quad \forall s, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}r\right),$$

wobei  $d^{S_r^2}$  der von der Riemannschen Metrik auf  $S_r^2$  induzierte Abstand ist.

BEWEIS:

Sei o.B.d.A.  $x := \gamma_1(0) = r(0, 0, 1)$ ,  $y := \gamma_1(s) = r(0, \sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r}))$  für  $s \in (0, \frac{\pi}{2}r)$ ,  $z := \gamma_2(t) = r(\sin(\frac{t}{r}), 0, \cos(\frac{t}{r}))$  für  $t \in (0, \frac{\pi}{2}r)$ .

Der Abstand der Punkte  $y$  und  $z$  wird durch ein geodätisches Segment realisiert, das einen Großkreisbogen beschreibt. Seine Länge berechnet sich als Produkt des Radius mit dem Winkel  $\angle(y, z)$ . Da  $\cos(\frac{t}{r}), \cos(\frac{s}{r}) < 1$  und  $\arccos$  streng monoton fallend ist, folgt

$$\begin{aligned} d^{S^2}(y, z) &= r \arccos \left( \cos\left(\frac{s}{r}\right) \cos\left(\frac{t}{r}\right) \right) \\ &> r \arccos \left( \max\left\{ \cos\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{t}{r}\right) \right\} \right) = \max\{s, t\}. \end{aligned}$$

□

BEWEIS (VON SATZ 1.6.4):

Nehmen wir an, dass ein Dreieck  $abc$  wie oben beschrieben mit zwei rechten Winkeln existiert, sagen wir diese befinden sich an den Ecken  $a$  und  $b$ . Nun können wir o.B.d.A annehmen, dass  $d^S(a, c) \geq d^S(b, c)$  ist. Wir wenden nun

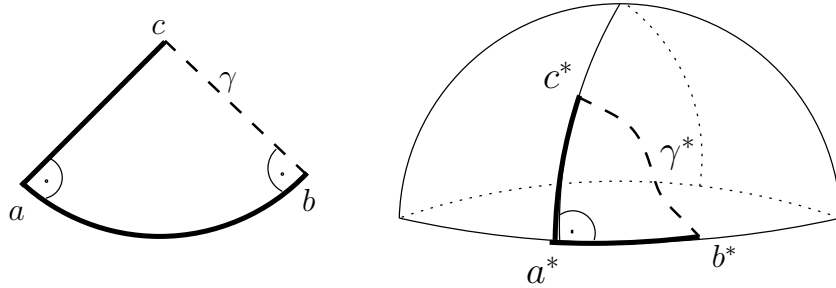


Abbildung 1.6: a) geodätisches Dreieck  $abc$  b) Vergleichsdreieck  $a^*b^*c^*$  auf  $S_r^2$

den Rauchschen Vergleichssatz auf  $a$  und einen beliebigen Punkt  $a^* \in S_r^2$  an. Dabei betrachten wir  $v(s) := \exp_a^{-1}(\gamma(s))$ , wobei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  ein S-minimales Segment von  $b$  nach  $c$  ist. Für eine beliebige orthogonale Abbildung  $I : T_aM \rightarrow T_{a^*}S_r^2$ , erhalten wir ein Vergleichsdreieck mit den Punkten  $b^* := \exp(I \circ v(0))$  und  $c^* := \exp(I \circ v(1))$ . Aus dem Rauchschen Vergleichssatz folgt nun für  $\gamma^*(t) := \exp_{a^*}(I \circ v(t))$ , dass

$$d^{S^2}(b^*, c^*) \leq L(\gamma^*) \leq L(\gamma) = d^S(b, c).$$

Andererseits können wir auch Lemma 1.6.6 auf die minimalen Segmente  $a^*c^*$  und  $a^*b^*$  anwenden und, da  $I$  orthogonal ist, folgern:

$$d^{S^2}(b^*, c^*) > \max\{d^{S^2}(a^*, c^*), d^{S^2}(a^*, b^*)\} \geq d^{S^2}(a^*, c^*) = d^S(a, c) \geq d^S(b, c).$$

Durch diesen Widerspruch erhalten wir die Behauptung. □

BEWEIS (VON SATZ 1.6.3):

Sei  $\tilde{\varepsilon} < 1/2 \min\{\text{inj}_S(S), \frac{\pi}{2\sqrt{R}}\}$  und  $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$  fest, so ist  $f$  auf einer ausreichend kleinen Umgebung von  $D$  ein lokaler Diffeomorphismus. Es genügt somit zu zeigen, dass  $f$  injektiv ist.

Nehmen wir hingegen an, dass  $f$  nicht injektiv ist, so existieren  $(t_1, s_1) \neq (t_2, s_2) \in D$ , so dass  $\exp_{c_1(t_1)}(s_1 N(t_1)) = \exp_{c_1(t_2)}(s_2 N(t_2)) =: x$ . Da  $\varepsilon < \text{inj}_S(S)$  können wir ausschließen, dass  $t_1 = t_2$  gilt. Der Abstand der Fußpunkte lässt sich nun abschätzen durch  $d^S(c_1(t_1), c_1(t_2)) \leq d^S(c_1(t_1), x) + d^S(x, c_1(t_2)) < \frac{\pi}{2\sqrt{R}}$ . Somit beschreiben die Punkte  $c_1(t_1), c_1(t_2), x$  ein geodätisches Dreieck mit Seitenlänge kleiner als  $\frac{\pi}{2\sqrt{R}}$  und 2 rechten Winkeln im Widerspruch zu Satz 1.6.4. □

## 1.7 Randgeodätische verlaufen asymptotisch

Wir haben gesehen, dass auf (bmb)-Streifen Fermikoordinaten definiert werden können. Im Allgemeinen wird jedoch nicht der gesamte Streifen durch das Kartengebiet überdeckt. Laufen die Randgeodätischen jedoch asymptotisch zusammen, ist diese Aussage außerhalb eines ausreichend großen Kompaktums richtig. Diese Aussage präzisieren wir zunächst durch folgende Definition:

### 1.7.1 Definition

1. Der *Hausdorff-Abstand* (bezüglich  $d^S$ ) zweier Mengen  $U, V \subset S$  ist

$$d_H^S(U, V) := \max\{\sup_{u \in U} d^S(u, V), \sup_{v \in V} d^S(U, v)\}.$$

2. Wir sagen die Kurven  $c_1, c_2 : \mathbb{R} \rightarrow M$  *verlaufen asymptotisch*, falls für eine Folge kompakter Mengen  $(K_n)$ , die  $M$  vollständig ausschöpfen, gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H^S(c_1 \setminus K_n, c_2 \setminus K_n) = 0.$$

### 1.7.2 Satz

Sei  $S$  ein (bmb)-Streifen und  $c_1, c_2$  Randgeodätische von  $S$ , so verlaufen  $c_1$  und  $c_2$  *asymptotisch*.

BEWEIS:

Verlaufen  $c_1$  und  $c_2$  nicht asymptotisch, so existiert zu jeder Folge von Kompakta  $(K_n)$ , ein positives  $\delta < \frac{\pi}{4\sqrt{R}}$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein  $s_n \in \mathbb{R}$ , so dass

o.B.d.A.  $c_2(s_n) \notin K_n$  und  $d^S(c_2(s_n), c_1) \geq \delta$ . Sei  $\tilde{\varepsilon}$  und  $D$  wie in Satz 1.6.3. Indem wir  $\delta$  eventuell verkleinern, können wir voraussetzen, dass  $2\delta < \tilde{\varepsilon}$ . Sei  $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$  die zugehörige Karte und  $U := \{s \in \mathbb{R} \mid d^S(c_2(s), c_1) \leq 2\delta\}$ . Ohne Einschränkung ist  $(s_n) \subset U$ , denn sonst existiert eine kompakte Teilmenge  $\tilde{K} \subset \mathbb{R}$ , so dass  $(\mathbb{R} \setminus \tilde{K}) \times [0, 2\delta] \subset D$ . Mit (1.7) und Abschätzung (1.9) folgt dann

$$\begin{aligned} F(S) &\geq F(f((\mathbb{R} \setminus K) \times [0, 2\delta])) \\ &= \int_{\mathbb{R} \setminus K} \int_{[0, 2\delta]} \alpha(t, s) \, ds \, dt \geq \cos(2\delta\sqrt{R}) \, 2\delta \, \lambda^1(\mathbb{R} \setminus K) \end{aligned}$$

im Widerspruch zu  $F(S) < \infty$ .

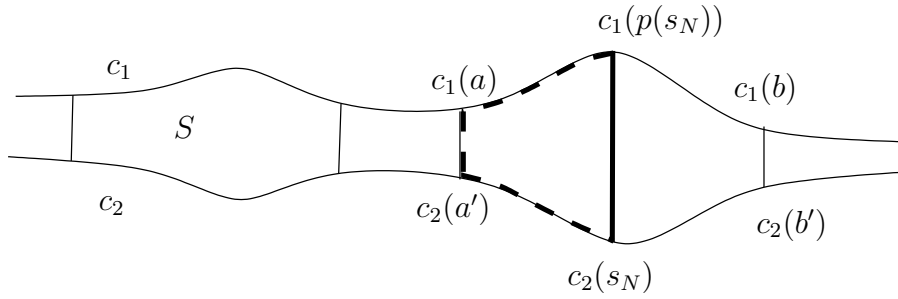


Abbildung 1.7:

Da  $c_2$  die normalen Geodätischen auf  $c_1$  transversal schneidet, ist die Verknüpfung mit der Projektion auf die erste Kartenkomponente  $p := \Phi^1 \circ c_2|_U$  ein lokaler Diffeomorphismus und, da  $c_2$  aufgrund der Minimalität jede normale Geodätische höchstens einmal schneidet, ist  $p$  auch ein Diffeomorphismus auf sein Bild. Wir betrachten nun die Menge  $I := \mathbb{R} \setminus p(A)$  mit  $A := \{s \in \mathbb{R} \mid d^S(c_2(s), c_1) \leq \frac{\delta}{6}\}$ . Da diese Menge offen ist, ist sie abzählbare Vereinigung offener, disjunkter Intervalle  $I = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$ . Da außerdem  $I \times [0, \delta/6] \subset D$  folgt nun wie oben:

$$F(S) \geq \cos\left(\frac{\delta}{6}\sqrt{R}\right) \frac{\delta}{6} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda^1(I_k),$$

Da  $S$  endliche Oberfläche besitzt, ist  $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \lambda^1(I_k) = 0$ . Die Folge  $(p(s_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ist in  $I$  enthalten und  $|p(s_n)|$  wird beliebig groß. Daher existiert  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für das Intervall  $(a, b) := I_{k(N)} \ni p(s_N)$  gilt  $\lambda^1(I_{k(N)}) < \frac{\delta}{6}$ . Setzen wir  $a' := p^{-1}(a)$  und  $b' := p^{-1}(b)$ , so folgt wegen der Minimalität von  $c_1$  und  $c_2$



aus

$$L(c_2|_{[a',b']}) \leq d^S(c_2(a'), c_1(a)) + L(c_1|_{[a,b]}) + d^S(c_1(b), c_2(b')) < \frac{\delta}{2}$$

der gewünschte Widerspruch:

$$\begin{aligned} \delta \leq d^S(c_1(p(s_N)), c_2(s_N)) &\leq L(c_1|_{[a,p(s_N)]}) + d^S(c_1(a), c_2(a')) + L(c_2|_{[a',s_N]}) \\ &\leq L(c_1|_{[a,b]}) + d^S(c_1(a), c_2(a')) + L(c_2|_{[a',b']}) \\ &< \delta. \end{aligned}$$

□

Die nun folgende Bemerkung führt einige wichtige Bezeichnungen ein, die im zweiten Kapitel teilweise auch ohne Verweis benutzt werden.

**1.7.3 Bemerkung** Sei  $S \subset M$  ein (bmb)-Streifen mit Randgeodätischen  $c_1, c_2$  und  $N$  das bezüglich  $S$  nach innen weisende Normalenfeld entlang  $c_1$ . Weiterhin seien  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $h_{\varepsilon_0}$ ,  $D$  und  $f$  wie in Satz 1.6.3.

1. Nach Satz 1.7.2 existiert ein Kompaktum  $K \subset M$ , so dass auf  $S \setminus K$  Fermikoordinaten definiert sind.
2. Sei  $\delta \leq \varepsilon_0$  positiv, so definieren wir:

$$\begin{aligned} t^-(\delta) &:= \begin{cases} \sup\{t \mid h_{\varepsilon_0}(\tau) < \delta \quad \forall \tau \leq t\}; & \delta \in h_{\varepsilon_0}(\mathbb{R}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ t^+(\delta) &:= \begin{cases} \inf\{t \mid h_{\varepsilon_0}(\tau) < \delta \quad \forall \tau \geq t\}; & \delta \in h_{\varepsilon_0}(\mathbb{R}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Sei  $T := \mathbb{R} \setminus [t^-(\varepsilon_0), t^+(\varepsilon_0)]$ , so sind die Geodätischen  $\tilde{N}_t(s)$ ,  $s \in [0, h_{\varepsilon_0}(t)]$  für alle  $t \in T$  minimale Segmente, die  $S$  in genau zwei Zusammenhangskomponenten zerlegen.

Wir bezeichnen für  $t_1 < t_2 \in T$  die von  $\tilde{N}_{t_1}$  und  $\tilde{N}_{t_2}$  begrenzte kompakte Teilmenge von  $S$  mit  $M(t_1, t_2)$ .

Sei  $E(\delta) := S \setminus M(t^-(\delta), t^+(\delta))$ , so ist für alle Punkte aus  $E(\delta)$  der Abstand zu  $c_1$  echt kleiner als  $\delta$ . Wir nennen sie daher *die  $\delta$ -Enden von  $S$* .

3. Eine Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$  läuft in  $c_1$ -Richtung, falls Folgen  $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  existieren, so dass

$$\lim_{i \rightarrow \pm\infty} s_i = \pm\infty = \lim_{i \rightarrow \pm\infty} t_i \quad \text{und} \quad \lim_{|i| \rightarrow \infty} d(c_1(s_i), \gamma(t_i)) = 0.$$

## 2 Existenz Minimax-Geodätischer

In diesem Kapitel werden wir die Existenz Minimax-Geodätischer in (bmb)-Streifen beweisen. Die vorgestellte Methode beruht auf dem Birkhoffschen Verkürzungsprozess. Während Lyusternik und Schnirelmann, beim Beweis der Existenz von geschlossenen Geodätischen auf Sphären, den Birkhoffschen Verkürzungsprozess auf Kurven anwenden, die  $[0, 1]$  in eine kompakte Mannigfaltigkeit abbilden (vgl. [Kli95]), stellt in dem hier vorgestellten Fall die Nicht-Kompaktheit das Hauptproblem dar.

Wir werden zunächst in Kapitel 2.1 eine kurzen Einführung zum Minimax-Prinzip geben und aufzeigen, in wiefern der Birkhoffsche Verkürzungsprozess sich dazu eignet. In Kapitel 2.2 betrachten wir (bmb)-Streifen und den Raum der zugehörigen Kurven. Wir definieren darauf ein Funktional  $\mathcal{L}$ , das ein Maß für die Minimalität der Kurven beschreibt und betrachten erste Eigenschaften dieser Objekte. In Kapitel 2.3 definieren wir einen Verkürzungsprozess  $\overline{\mathcal{D}}$  für Kurven mit vorgegebener Parametrisierung und endlichem Funktionalwert  $\mathcal{L}$ . Wir zeigen insbesondere, dass dieser stetig und  $\mathcal{L}$ -verkürzend ist. Im darauf folgenden Kapitel 2.4 können wir zeigen, dass  $\mathcal{L}$  eine Variante der Palais-Smale-Bedingung erfüllt. Nun können wir in Kapitel 2.5 die Minimax-Methode anwenden und zeigen, dass „Minimax-Geodätischer“ in (bmb)-Streifen existieren, falls der sogenannte Minimaxwert größer als Null ist. Zum Abschluss betrachten wir in Kapitel 2.6 zweidimensionale Tori und diskutieren, unter welchen Bedingungen Minimax-Geodätische auf diesen existieren.

### 2.1 Die Minimax-Methode

Wir beginnen mit folgender Definition:

**2.1.1 Definition (vgl. [Str96],S.78)** Sei  $E \in C^1(\mathbb{R}^n)$ .

1. Eine Folge in  $\mathbb{R}^n$  heißt *Palais-Smale-Folge von  $E$* , falls für ein  $c > 0$   $|E(c_m)| \leq c$  für alle  $m \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|DE(c_m)\| = 0$ .
2.  $E$  erfüllt die *Palais-Smale-Bedingung*, falls jede Palais-Smale-Folge konvergiert.

Das nun folgende Mountain-Pass-Lemma stellt ein Modell für die Minimax-Methode dar.

### 2.1.2 Satz

Erfüllt  $E \in C^1(\mathbb{R}^n)$  die Palais-Smale-Bedingung und besitzt  $E$  zwei verschiedene strikte relative Minima  $x_1$  und  $x_2$ , so besitzt  $E$  einen weiteren kritischen Punkt  $x_3$ , der durch das Minimax-Prinzip charakterisiert wird, d.h.

$$E(x_3) = \inf_{p \in P} \max_{x \in p} E(x) =: \beta.$$

Hierbei bezeichnet

$$P = \{p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid p \text{ stetig}, p(0) = x_1, p(1) = x_2\}$$

die Menge der „Wege“, die  $x_1$  mit  $x_2$  verbinden.

### 2.1.3 Bemerkung

Nehmen wir an, dass  $n = 2$  und  $E$  die Höhenfunktion bezeichnet, so besagt dieses Theorem, dass zu je zwei Tälern ein höher gelegener „Bergpasspunkt“ existiert. Wie Abbildung 2.1 veranschaulicht, ist dieser jedoch nicht immer ein Sattelpunkt, wie dies vielleicht zunächst die Vorstellung suggeriert.

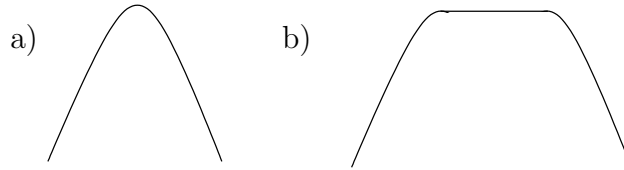


Abbildung 2.1: Bergprofile: a) Sattelpunkt-Pass b) ausgearteter Pass

Wir skizzieren nun den Beweis:

BEWEIS:

Da  $x_1, x_2$  strikte relative Minima sind, ist  $\beta > \max\{E(x_1), E(x_2)\}$ . Es genügt daher zu zeigen, dass  $\beta$  ein kritischer Wert ist. Argumentieren wir indirekt und nehmen an, dass  $\beta$  regulär ist. Wir betrachten die Menge  $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid E(x) = \beta, DE(x) = 0\}$ . Ist  $K = \emptyset$ , so existiert ein  $\delta > 0$  so dass auch die offene Menge  $U := E^{-1}((\beta - \delta, \beta + \delta))$  keine kritischen Punkte enthält. Denn sonst existiert eine Folge von Punkten  $y_n \in \mathbb{R}^n$ , so dass  $E(y_n) \rightarrow \beta$  und  $DE(y_n) = 0$ . Da  $E$  die Palais-Smale-Bedingung erfüllt, existiert dann eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert  $y$  in  $K$  liegt.

Mit Hilfe des negativen Gradientenfluss lässt sich nun eine stetige Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  konstruieren, die folgende Eigenschaften erfüllt (vgl. [Str96, Thm 3.4]):

1.  $\Phi(\cdot, 0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$
2.  $\Phi(x, t) = x$ , falls  $DE(x) = 0$  und  $t \geq 0$
3.  $E(\Phi(x, t)) \leq E(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $t > 0$
4.  $\Phi(E^{-1}((-\infty, \beta + \delta)), 1) \subset E^{-1}((-\infty, \beta - \delta))$

Nach Definition von  $\beta$  existiert nun ein Weg  $p \in P$ , so dass  $\max_{x \in p} E(x) < \beta + \delta$ . Da  $\Phi$  stetig ist und die Punkte  $x_1, x_2$  festlässt, ist  $\Phi \circ p$  auch ein Weg aus  $P$ . Außerdem folgt aus den Eigenschaften von  $\Phi$  auch, dass  $\max_{x \in \Phi \circ p} E(x) < \beta - \delta$  im Widerspruch zur Definition von  $\beta$ .  $\square$

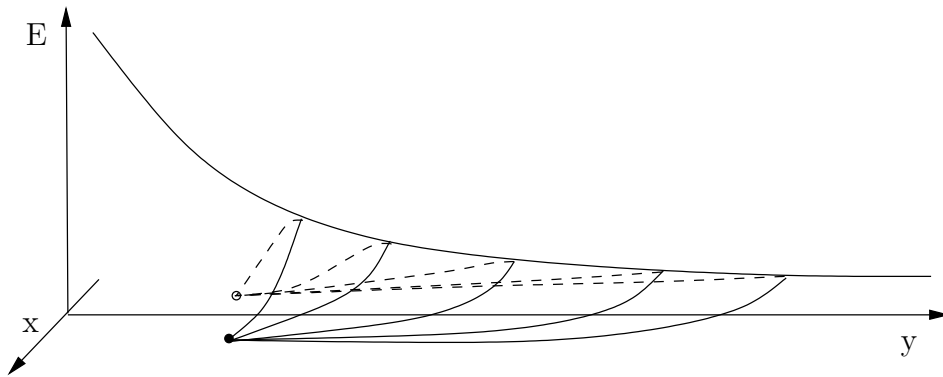


Abbildung 2.2: erfolglose Suche nach einem Bergpass

Abbildung 2.2 macht deutlich, dass der Satz im Allgemeinen falsch wird, wenn das Funktional die Palais-Smale-Bedingung nicht erfüllt. Wir können somit die zwei wichtigen Bedingungen an die Funktion  $E$  zusammenfassen: 1) Es existiert ein Deformationsfluss, der die Funktionswerte von  $E$  geeignet verringert und 2)  $E$  erfüllt die Palais-Smale-Bedingung. Erinnern wir uns nun zurück an den klassischen Birkhoff'schen Verkürzungsprozess, so zeigen Lemmata 1.3.3 und 1.3.5, dass dieser die oben beschriebenen Eigenschaften eines Deformationsflusses für das Energiefunktional erfüllt. Lemma 1.3.4 zeigt dann auch, dass die Palais-Smale-Bedingung erfüllt wird, die in diesem Fall statt mit der Ableitung des Energiefunktionals mit dem Verkürzungsprozess definiert wird.

## 2.2 Das Längenfunktional $\mathcal{L}$

Wir betrachten im Folgenden einen (bmb)-Streifen  $S \subset M$  mit Randgeodätischen  $c_1$  und  $c_2$ . Wie wir in Kapitel 1 gesehen haben, werden durch die Riemannsche Metrik auf  $M$  zwei Abstands begriffe auf  $S$  definiert:  $d$  und  $d^S$ . Wir werden im Folgenden ausschließlich den metrischen Raum  $(S, d^S)$  betrachten und schreiben daher abkürzend  $d$  statt  $d^S$ ,  $d_H$  statt  $d_H^S$  und minimales Segment statt  $S$ -minimales Segment. Weiterhin sei im Folgenden für eine Teilmenge  $A \subset S$  und  $\varepsilon > 0$  der metrische Ball folgendermaßen bezeichnet

$$\mathcal{B}_\varepsilon(A) := \{p \in S \mid d^S(p, K) < \varepsilon\}.$$

Wir wählen  $\varepsilon_0 < \frac{\pi}{2\sqrt{R}}$  und  $D$  wie in Satz 1.6.3 und definieren auf  $D$  Fermi-koordinaten  $f$ . Die Umkehrfunktion von  $f$ , also die zugehörige Karte nennen wir  $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2) : f(D) \rightarrow D$ . Nach Konstruktion ist  $c_1(\Phi^1(p))$  die Orthogonalprojektion von  $p \in f(D)$  auf  $c_1$  und es gilt:

$$d(c_1(\Phi^1(p)), p) = d(c_1, p) = \Phi^2(p)$$

Um die Notation zu vereinfachen, definieren wir für alle  $p \in S$ :

$$p_1 := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid d(c_1(t), p) = d(c_1, p)\} \quad \text{und} \quad p_2 := d(p, c_1(p_1)). \quad (2.1)$$

Falls  $p \in f(D)$  liegt, stimmt  $p_i$  mit  $\Phi^i(p)$  für  $i = 1, 2$  überein.

Nun definieren wir auf  $S$  den Kurvenraum

$$\Omega := \{\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S \mid \gamma \text{ ist n. Bl. p. Kurve, die in } c_1\text{-Richtung läuft}\}$$

mit der durch die folgende Metrik induzierten Topologie  $\mathcal{O}^{\tilde{d}}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{d} : \Omega \times \Omega &\rightarrow [0, \infty] \\ (\gamma_1, \gamma_2) &\mapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{aligned}$$

Betrachten wir auf diesem Raum das übliche Längenfunktional  $L$ , so ist  $L \equiv \infty$  und somit ungeeignet. Sinnvoll ist hingegen ein „Längenvergleich“. Diese Methode Funktionale mit einer fest gewählten Trajektorie zu renormalisieren geht auf Rabinowitz zurück, vgl. [Rab99]. Betrachten wir zunächst ein Segment

$\gamma|_{[s_1, s_2]}$  und folgende Differenz

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma, s_1, s_2) &:= L(\gamma|_{[s_1, s_2]}) - L(c_1|_{[\gamma(s_1)_1, \gamma(s_2)_1]}) \\ &= s_2 - s_1 - (\gamma(s_2)_1 - \gamma(s_1)_1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Liegen  $\gamma(s_1)_1, \gamma(s_2)_1$  in  $T := h_\varepsilon^{-1}([0, \varepsilon])$ , so bestimmen dessen Endpunkte ein Kompaktum  $M(\gamma(s_1)_1, \gamma(s_2)_1)$ , wobei wir die Schreibweise aus 1.7.3 verwenden. Der Wert  $\mathcal{L}(\gamma, s_1, s_2)$  gibt also Aufschluss darüber, wieviel Länge  $\gamma$  im Vergleich zu  $c_1$  verbraucht, um  $M(\gamma(s_1)_1, \gamma(s_2)_1)$  zu verlassen. Aufgrund der Minimalität von  $c_1$  gilt

$$L(c_1|_{[\gamma(s_1)_1, \gamma(s_2)_1]}) \leq \gamma(s_1)_2 + L(\gamma|_{[s_1, s_2]}) + \gamma(s_2)_2. \quad (2.3)$$

und daher

$$\mathcal{L}(\gamma, s_1, s_2) \geq -(\gamma(s_1)_2 + \gamma(s_2)_2) \quad (2.4)$$

Ersetzt man die Kurve  $\gamma$  auf einem Intervall  $[t_1, t_2] \subset [s_1, s_2]$  durch ein minimales Segment, so erfüllt auch die neue Kurve  $\tilde{\gamma}$  Abschätzung (2.4) und es folgt mit

$$\mathcal{L}(\tilde{\gamma}, s_1, s_2) = \mathcal{L}(\gamma, s_1, s_2) + d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) - L(\gamma|_{[t_1, t_2]})$$

folgende Ungleichung

$$L(\gamma|_{[t_1, t_2]}) \leq d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) + \mathcal{L}(\gamma, s_1, s_2) + \gamma(s_1)_2 + \gamma(s_2)_2. \quad (2.5)$$

Ist der Abstand der Endpunkte von  $\gamma|_{[s_1, s_2]}$  zu  $c_1$  klein, gibt dieses Funktional also eine obere Schranke an, wie stark die Kurve auf jedem Intervall  $[t_1, t_2] \subset [s_1, s_2]$  davon abweichen kann, minimal zu sein. Definieren wir nun das Funktional  $\mathcal{L}$  durch den Limes der Differenzen:

$$\mathcal{L}(\gamma) := \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma, -s, s) = \lim_{s \rightarrow \infty} 2s - (\gamma(s)_1 - \gamma(-s)_1).$$

Ungleichung (2.5) zeigt nun, dass der Wert des Funktional  $\mathcal{L}$  eine obere Schranke dafür darstellt, wie stark jedes einzelne Segment von  $\gamma$  davon abweichen kann minimal zu sein. Es ist sogar die kleinste obere Schranke und somit stellt das Funktional ein Maß für die Minimalität der Kurve dar.

**2.2.1 Lemma**  $\mathcal{L} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist wohldefiniert.

BEWEIS:

Wir unterscheiden zwei Fälle:

Sei zunächst  $\gamma$  eigentlich, d.h. dass Urbilder beliebiger kompakter Mengen  $K \subset S$  unter  $\gamma$  kompakt sind, so gilt für alle  $0 < \tilde{s} < s$ :

$$\begin{aligned} \liminf_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma, -s, s) &= \liminf_{s \rightarrow \infty} (\mathcal{L}(\gamma, -s, -\tilde{s}) + \mathcal{L}(\gamma, -\tilde{s}, \tilde{s}) + \mathcal{L}(\gamma, \tilde{s}, s)) \\ &\stackrel{(2.4)}{\geq} \liminf_{s \rightarrow \infty} (-\gamma(-s)_2 - \gamma(-\tilde{s})_2 + \mathcal{L}(\gamma, -\tilde{s}, \tilde{s}) \\ &\qquad\qquad\qquad -\gamma(\tilde{s})_2 - \gamma(s)_2) \\ &= \mathcal{L}(\gamma, -\tilde{s}, \tilde{s}) - \gamma(-\tilde{s})_2 - \gamma(\tilde{s})_2 \end{aligned}$$

und es folgt

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma, -s, s) \geq \limsup_{\tilde{s} \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma, -\tilde{s}, \tilde{s}) - \gamma(-\tilde{s})_2 - \gamma(\tilde{s})_2$$

Somit ist der Grenzwert wohldefiniert, da nach Satz 1.7.2  $-\gamma(-\tilde{s})_2 + \gamma(\tilde{s})_2$  gegen 0 konvergiert.

Sonst existiert ein Kompaktum  $K = M(t_1, t_2) \subset S$  (vgl. Bemerkung 1.7.3) und eine Folge  $(s_n)$ , die o.B.d.A. gegen unendlich konvergiert und so dass die Punkte  $\gamma(s_n) \in K$  liegen. Nach Satz 1.7.2 ist  $l := \sup_{p \in S} d(c_1, p) < \infty$ . Dann folgt wie in der obigen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \liminf_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma, -s, s) &\stackrel{(2.4)}{\geq} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma, -s_n, s_n) - 4l \\ &\stackrel{(2.4)}{\geq} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\gamma(-s_n)_2 - \gamma(s_1)_2 + \mathcal{L}(\gamma, s_1, s_n) - 4l \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} L(\gamma|_{[s_1, s_n]}) - (t_2 - t_1) - 6l = \infty \end{aligned}$$

Somit ist die Aussage auch in diesem Fall richtig.  $\square$

**2.2.2 Lemma** Sei  $\gamma \in \Omega$ , so ist  $\mathcal{L}(\gamma) \geq 0$  und  $\mathcal{L}(\gamma)$  ist genau dann 0, wenn  $\gamma$  eine minimale Geodätische ist.

**2.2.3 Bemerkung** Ist  $\gamma \in \Omega$ , so sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $\gamma$  ist minimale Geodätische nach der Definition zu Beginn von Abschnitt 1.2
2. Jedes Segment von  $\gamma$  ist  $S$ -minimal.

Natürlich ist jedes geodätische Segment einer minimalen Geodätischen mit Bild in  $S$  ein  $S$ -minimales Segment. Bezeichnen wir nun zur besseren Unterscheidung mit  $d^S$  die Metrik auf  $S$  und mit  $d^M$  die Metrik auf  $M$ . Sei  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$  eine Geodätische und jedes Segment von  $\gamma$   $S$ -minimal. Argumentieren wir

nun indirekt und nehmen an, dass ein Intervall  $I = [a, b]$  existiert, so dass  $L(\gamma|_I) - d^M(\gamma(a), \gamma(b)) =: \varepsilon > 0$ . Da jedes Segment von  $\gamma$   $S$ -minimal ist, ist  $\gamma$  insbesondere eigentlich. Es existieren also  $a' < b' \in \mathbb{R}$ , so dass  $[a, b] \subset [a', b']$  und  $\gamma(a')_2 + \gamma(b')_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ . Ersetzen wir das Segment  $\gamma|_{[a, b]}$  durch ein bezüglich der Metrik  $d^M$  minimales Segment und bezeichnen die neue Kurve mit  $\tilde{\gamma}$ . So folgt

$$\begin{aligned} L(\tilde{\gamma}|_{[a', b']}) + \tilde{\gamma}(a')_2 + \tilde{\gamma}(b')_2 &= L(\gamma|_{[a', b']}) - \varepsilon + \gamma(a')_2 + \gamma(b')_2 \\ &\leq L(c_1|_{[\gamma(a')_1, \gamma(b')_1]}) + 2(\gamma(a')_2 + \gamma(b')_2) - \varepsilon \\ &< L(c_1|_{[\gamma(a')_1, \gamma(b')_1]}) \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Minimalität von  $c_1$ .

BEWEIS:

Die erste Aussage folgt sofort aus (2.4).

Sei nun zunächst  $\mathcal{L}(\gamma) = 0$ , so folgt die Behauptung aus (2.5). Umgekehrt folgt, falls  $\gamma$  minimale Geodätische, für beliebige  $s > 0$ :

$$L(\gamma|_{[-s, s]}) \leq L(c_1|_{[\gamma(-s)_1, \gamma(s)_1]}) + \gamma(-s)_2 + \gamma(s)_2$$

Im Grenzwert gilt dann  $\mathcal{L}(\gamma) \leq 0$  und somit schon Gleichheit.  $\square$

Der Beweis von 2.2.1 zeigt insbesondere, dass Kurven mit  $\mathcal{L}(\gamma) < \infty$  eigentlich sind. Die Bedingung  $\mathcal{L} < \infty$  ist jedoch stärker: Wie folgendes Lemma zeigt, weichen diese Kurven in den Enden beliebig wenig davon ab, minimal zu sein:

**2.2.4 Lemma** *Sei  $\gamma \in \Omega$  und  $\mathcal{L}(\gamma) < \infty$ , so folgt für  $s_1 < s_2$ :*

$$\mathcal{L}(\gamma, s_1, s_2) \rightarrow 0 \text{ und } \mathcal{L}(\gamma, -s_2, -s_1) \rightarrow 0, \text{ wenn } s_1 \rightarrow \infty$$

BEWEIS:

Da der Grenzwert  $\mathcal{L}$  existiert, gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma, s_1, s_2) &= \mathcal{L}(\gamma, -s_2, s_2) - \mathcal{L}(\gamma, -s_1, s_1) - \mathcal{L}(\gamma, -s_2, -s_1) \\ &\stackrel{(2.4)}{\leq} \mathcal{L}(\gamma, -s_2, s_2) - \mathcal{L}(\gamma, -s_1, s_1) + \gamma(-s_2)_2 + \gamma(s_1)_2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Die umgekehrte Abschätzung folgt sofort aus (2.4).  $\square$

**2.2.5 Folgerung** *Seien  $\alpha, \omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  monotone Funktionen, so dass  $\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha(s) = -\infty$  und  $\lim_{s \rightarrow \infty} \omega(s) = \infty$ , so gilt für alle  $\gamma \in \Omega$ :*

$$\mathcal{L}(\gamma) = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma, \alpha(s), \omega(s)).$$



Speziell gilt für beliebige monotone Folgen  $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  mit  $\lim_{i \rightarrow \pm\infty} \xi_i = \pm\infty$ :

$$\mathcal{L}(\gamma) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma, \xi_{-i}, \xi_i) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}(\gamma, \xi_{k-1}, \xi_k).$$

BEWEIS:

Sei  $m(s) := \min(-\alpha(s), \omega(s))$ , so ist  $m$  eine monoton wachsende Funktion und somit gilt:  $\mathcal{L}(\gamma) = \lim_{s \rightarrow \infty} 2m(s) - (\gamma(m(s))_1 - \gamma(-m(s))_1)$ . Falls  $\mathcal{L}(\gamma) < \infty$  folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma, \alpha(s), \omega(s)) &= \mathcal{L}(\gamma, \alpha(s), -m(s)) + \mathcal{L}(\gamma, -m(s), m(s)) \\ &\quad + \mathcal{L}(\gamma, m(s), \omega(s)) \\ &\stackrel{2.2.4}{\rightarrow} \mathcal{L}(\gamma) \end{aligned}$$

Ist  $\mathcal{L}(\gamma) = \infty$ , so erhalten wir wie im Beweis von Lemma 2.2.1

$$\mathcal{L}(\gamma, \alpha(s), \omega(s)) \geq \mathcal{L}(\gamma, -m(s), m(s)) - 4 \max_{p \in S} d(c_1, p) \rightarrow \infty. \quad \square$$

Lemma 2.2.4 lässt vermuten, dass Kurven endlicher Länge sich stark von anderen Kurven unterscheiden. Daher definieren wir

### 2.2.6 Bezeichnung

$$\bar{\Omega} := \{\gamma \in \Omega \mid \mathcal{L}(\gamma) < \infty\}$$

Die Einschränkung auf diesen Raum ist nur sinnvoll, falls Wege (Homotopien) aus Kurven endlicher Länge zwischen  $c_1$  und  $c_2$  existieren. Wir werden sehen, dass sogar Homotopien existieren, für die  $\mathcal{L}$  gleichmäßig beschränkt ist. Dazu definieren wir zunächst die Menge der Homotopien von  $c_1$  zu  $c_2$ :

$$\mathcal{H} := \{H : [0, 1] \rightarrow \Omega \mid H \text{ stetig und } H(0) = c_1, H(1) = c_2\}$$

### 2.2.7 Satz

Es existiert eine Homotopie  $H \in \mathcal{H}$ , so dass  $\max_{t \in [0, 1]} \mathcal{L}(H(t)) < \infty$ .

BEWEIS:

Wir konstruieren nun eine Homotopie, deren Kurven bis auf einen kompakten Mittelteil stückweise aus minimalen Segmenten bestehen. Dazu zerlegen wir zunächst  $S$  mit Hilfe einer Folge von auf  $c_1$  normalen geodätischen Segmenten. Zu  $\varepsilon_1 < \min\{\varepsilon_0, \text{inj}_S(S)/3\}$  definieren wir  $t^-(\varepsilon_1) \leq t^+(\varepsilon_1) \in \mathbb{R}$  wie in Bemerkung 1.7.3. Wir bezeichnen  $I := \mathbb{R} \setminus [t^-(\varepsilon_1), t^+(\varepsilon_1)]$  und definieren die Funktion  $h : I \rightarrow [0, \varepsilon_1]$  durch  $h = h_{\varepsilon_1|I}$  wie in Kapitel 1.6 vor Lemma 1.6.2. Nun gilt

**2.2.8 Lemma** Für alle  $c > 0$  existiert eine streng monoton wachsende Folge  $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  in  $I$ , so dass

$$\sup \left\{ |t_{-1} - t^-(\varepsilon_1)|; |t_0 - t^+(\varepsilon_1)|; |t_i - t_{i-1}|, i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \leq c$$

und

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} h(t_i) \leq \frac{2F(S)}{c \cos(\sqrt{R}\varepsilon_1)}.$$

BEWEIS:

Sei  $J_i := [ic/2, (i+1)c/2]$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  und  $\Lambda := \{i \in \mathbb{Z} \mid J_i \subset I\}$ . Da  $h$  stetig ist, finden wir mit dem Mittelwertsatz zu jedem  $i \in \Lambda$ , ein  $t_i \in J_i$ , so dass

$$\frac{c}{2}h(t_i) = \int_{J_i} h(t)dt = \int_{J_i} \int_0^{h(t)} ds dt.$$

Für  $J := \bigcup_{i \in \Lambda} J_i$  und  $E := \bigcup_{t \in J} t \times [0, h(t)]$  berechnen wir nun erneut die Oberfläche mit Hilfe der Fermikoordinaten, für die Bezeichnungen vgl. Kapitel 1.6:

$$\begin{aligned} F(f(E)) &= \int_J \int_0^{h(t)} \alpha(t, s) ds dt \\ &\stackrel{(1.9)}{\geq} \cos(\sqrt{R}\varepsilon_1) \int_J \int_0^{h(t)} ds dt \\ &\geq \cos(\sqrt{R}\varepsilon_1) \frac{c}{2} \sum_{i \in \Lambda} h(t_i) \end{aligned}$$

Wegen  $F(E) \leq F(S)$ , erhalten wir nach Umindizierung die Behauptung.  $\square$

Wir konstruieren nun eine Homotopie aus  $\mathcal{H}$ :

Wir wählen für  $c := \frac{\text{inj}_S(S)}{3}$  eine Folge  $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  wie in Lemma 2.2.8 und parametrisieren die normalen Geodätischen  $\tilde{N}_{t_i}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , um, so dass sie auf  $[0, 1]$  definiert sind. Sei  $K := M(t_{-1}, t_0)$  wie in Bemerkung 1.7.3 und  $E = S \setminus K \subset E(\varepsilon_1)$ .  $K$  ist homöomorph zu  $[0, 1]^2$ . Daher existiert eine stetig differenzierbare Abbildung  $\tilde{f} : [0, 1]^2 \rightarrow K$ , die den Rand auf den Rand abbildet (vgl. [Hir76, Thm 3.3]). Diese definiert eine Homotopie  $\overline{H} : [0, 1]^2 \rightarrow K$  differenzierbarer Kurven, so dass  $\overline{H}(0, \cdot)$  bzw.  $\overline{H}(1, \cdot)$  mit den entsprechenden Segmenten von  $c_1$  bzw.  $c_2$  übereinstimmen und die Endpunkte der Kurven  $\overline{H}^s := \overline{H}(s, \cdot)$  in  $\tilde{N}_{t_{-1}}$  und  $\tilde{N}_{t_0}$  liegen.

Da das Differential von  $\tilde{f}$  auf dem Kompaktum  $K$  beschränkt ist, existiert insbesondere  $l > 0$ , so dass die Länge der Kurven  $\overline{H}^s$  durch  $\max_{s \in [0, 1]} L(\overline{H}^s) < l$  nach oben beschränkt ist.

Nun können wir jede Kurve  $\overline{H}^s$  in  $E$  durch minimale n.Bl.p. geodätische Segmente fortsetzen, die  $\tilde{N}_{t_i}(s)$  mit  $\tilde{N}_{t_{i+1}}(s)$  verbinden. Wir erhalten so auf ein-

deutige Weise eine Abbildung  $H : [0, 1] \rightarrow \Omega$ , da  $\sup_{s \in [0, 1]} d(\tilde{N}_{t_i}(s), \tilde{N}_{t_{i+1}}(s)) < 2\varepsilon_1 + c < \text{inj}_S(S)$ . Nach Konstruktion ist die Abbildung  $(t, s) \mapsto H(s)(t)$  stetig und surjektiv auf  $S$ .

Bezeichne nun  $H^s = H(s, \cdot)$  und  $(\theta_i^s)$  die Folge der Schnittstellen von  $H^s$  mit  $\tilde{N}_{t_i}$ . Um zu zeigen, dass auch  $H : [0, 1] \rightarrow \Omega$  stetig ist, wählen wir zu  $s \in [0, 1]$  fest und  $\varepsilon > 0$  ein  $j > 0$ , so dass

$$2 \sum_{i \geq j} h(t_i) < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{und} \quad t_j > t^+ \left( \frac{\varepsilon}{8} \right). \quad (2.6)$$

Sei weiterhin  $\tilde{t} > \theta_j^s + \varepsilon$ , so dass

$$\mathcal{B}_\varepsilon(H^s(\tilde{t})) \subset E\left(\frac{\varepsilon}{8}\right). \quad (2.7)$$

Dann existiert ein  $\delta > 0$ , so dass

$$\max_{t \in [-\tilde{t}, \tilde{t}]} d(H^s(t), H^\sigma(t)) < \frac{\varepsilon}{8}, \quad \forall \sigma \in [0, 1] \text{ mit } |s - \sigma| < \delta.$$

Wir zeigen nun, dass dann auch gilt

$$\sup_{t \in [-\tilde{t}, \infty)} d(H^s(t), H^\sigma(t)) < \varepsilon, \quad \forall \sigma \in [0, 1] \text{ mit } |s - \sigma| < \delta.$$

Dass für ein eventuell kleineres  $\delta$  sogar  $\tilde{d}(H^s(t), H^\sigma(t)) < \varepsilon$  gilt, folgt dann analog.

Zunächst ist nach Konstruktion klar, dass  $H^\sigma(t)_1 > t_j$  für alle  $t \in [\tilde{t}, \infty)$  gilt, falls  $|s - \sigma| < \delta$ . Mit  $k = k(\sigma, t) := \max\{i \mid t_i < H^\sigma(t)_1\}$  folgt dann, da für alle  $i \in \mathbb{Z}$  gilt  $h(t_i) = L(\tilde{N}(t_i)) \geq H^\sigma(\theta_i^\sigma)_2$ , dass :

$$\begin{aligned} |(H^\sigma(t)_1 - t) - (t_j - \theta_j^\sigma)| &= \left| (H^\sigma(t)_1 - t) - (t_k - \theta_k^\sigma) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j \leq i < k} (t_{i+1} - \theta_{i+1}^\sigma) - (t_i - \theta_i^\sigma) \right| \\ &\leq |(H^\sigma(t)_1 - t_k) - (t - \theta_k^\sigma)| + \\ &\quad \sum_{j \leq i < k} |(t_{i+1} - t_i) - (\theta_{i+1}^\sigma - \theta_i^\sigma)| \\ &\leq H^\sigma(t)_2 + H^\sigma(\theta_k^\sigma)_2 + \\ &\quad \sum_{j \leq i < k} (H^\sigma(\theta_{i+1}^\sigma)_2 + (H^\sigma(\theta_i^\sigma)_2)) \\ &\leq H^\sigma(t)_2 + 2 \sum_{i \geq j} H^\sigma(\theta_i^\sigma)_2 \\ &\leq H^\sigma(t)_2 + 2 \sum_{i \geq j} h(t_i) < H^\sigma(t)_2 + \frac{\varepsilon}{8} \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
 d(H^s(t), H^\sigma(t)) &\leq H^s(t)_2 + |H^s(t)_1 - H^\sigma(t)_1| + H^\sigma(t)_2 \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{4} + |(H^s(t)_1 - t) - (t_j - \theta_j^s)| + \\
 &\quad |(H^\sigma(t)_1 - t) - (t_j - \theta_j^\sigma)| + |\theta_j^s - \theta_j^\sigma| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{4} + H^s(t)_2 + \frac{\varepsilon}{8} + H^\sigma(t)_2 + \frac{\varepsilon}{8} + \\
 &\quad d(H^\sigma(\theta_j^s), H^s(\theta_j^s)) + d(H^s(\theta_j^s), H^\sigma(\theta_j^\sigma)) \\
 &\leq 7\frac{\varepsilon}{8} + h(t_j) < \varepsilon
 \end{aligned}$$

Mit Folgerung 2.2.5 können wir nun auch das Funktional  $\mathcal{L}$  abschätzen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(H^s) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}(H^s, \theta_{i-1}^s, \theta_i^s) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \mathcal{L}(H^s, \theta_{i-1}^s, \theta_i^s) + l - (t_0 - t_{-1}) \\
 &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (H^s(\theta_{i-1}^s)_2 + H^s(\theta_i^s)_2) + l \\
 &\leq 2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} H^s(\theta_i^s)_2 + l \\
 &\leq 2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} h(t_i) + l \stackrel{2.2.8}{\leq} 2 \frac{6F(S)}{\text{inj}_S(S) \cos(\varepsilon_1 \sqrt{R})} + l
 \end{aligned}$$

gleichmäßig in  $s$ . Die erste Ungleichung folgt analog zu (2.4) aus der Minimalität der Segmente von  $H^s$ .  $\square$

Der Raum  $\overline{\Omega}$  ist jedoch offensichtlich weder kompakt, noch kann das Funktional  $\mathcal{L}$  auf  $\overline{\Omega}$  die Palais-Smale-Bedingung erfüllen, da es invariant ist unter Umparametrisierungen. Der nun folgende Satz zeigt, dass wir die Parametrisierung geeignet festlegen können:

**2.2.9 Satz** *Es existiert genau eine Abbildung  $T : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$ , die folgende Eigenschaften erfüllt:*

1.  $\forall \gamma \in \overline{\Omega} \quad \exists \beta \in \mathbb{R} : T\gamma(t) = \gamma(t - \beta) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
2.  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(c_1(t), T\gamma(t)) = 0$
3.  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(c_1(t - \mathcal{L}(\gamma)), T\gamma(t)) = 0$

Die Abbildung  $T$  ist Lipschitz-stetig, und es gilt  $\mathcal{L} \circ T = \mathcal{L}$ .

BEWEIS:

Zunächst wird die Abbildung durch 1 und 2 bereits eindeutig festgelegt. Sei nun  $\gamma \in \overline{\Omega}$  fest und  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende, unbeschränkte Folge. Die Folge  $(s_i - \gamma(s_i)_1)$  ist eine Cauchyfolge. Denn sei  $\varepsilon > 0$  gegeben, so existiert wegen Lemma 2.2.4 ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|s_i - \gamma(s_i)_1 - (s_k - \gamma(s_k)_1)| = |\mathcal{L}(\gamma, s_k, s_i)| \leq \varepsilon$  für alle  $i \geq k \geq n_0$ . Nun definieren wir  $\beta := \lim_{i \rightarrow \infty} (s_i -$

$\gamma(s_i)_1$ ) und  $\tilde{\gamma}(s) := T\gamma(s) := \gamma(s+\beta)$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $\tilde{\gamma}$  Eigenschaften 1 und 2 erfüllt. Dazu benötigen wir folgendes

**2.2.10 Lemma** Sei  $\tilde{\gamma}$  wie oben definiert, so folgt

1.  $\lim_{s \rightarrow -\infty} s - \tilde{\gamma}(s)_1 = 0$
2.  $\lim_{s \rightarrow \infty} s - \mathcal{L}(\tilde{\gamma}) - \tilde{\gamma}(s)_1 = 0$

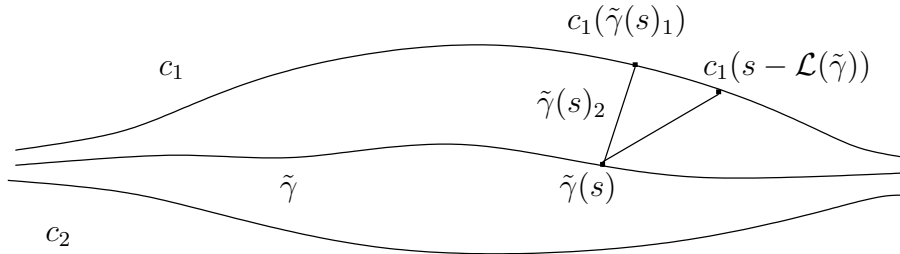


Abbildung 2.3:

Mit der Dreiecksungleichung folgt (vgl. Abbildung 2.3)

$$\begin{aligned} d(c_1(s), \tilde{\gamma}(s)) &\leq \tilde{\gamma}(s)_2 + |s - \tilde{\gamma}(s)_1| && \text{und} \\ d(c_1(s - \mathcal{L}(\tilde{\gamma})), \tilde{\gamma}(s)) &\leq \tilde{\gamma}(s)_2 + |s - \mathcal{L}(\tilde{\gamma}) - \tilde{\gamma}(s)_1| \end{aligned} \quad (2.8)$$

Somit erhalten wir mit Lemma 2.2.10 im Grenzwert:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} d(c_1(s), \tilde{\gamma}(s)) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} d(c_1(s - \mathcal{L}(\tilde{\gamma})), \tilde{\gamma}(s)) = 0$$

Um zu zeigen, dass  $T$  Lipschitz-stetig ist, wählen wir zwei beliebige Kurven  $\gamma_1, \gamma_2 \in \overline{\Omega}$  und bezeichnen  $\beta_j = \beta(\gamma_j)$ ,  $j = 1, 2$ , wie oben, so folgt (vgl. Abbildung 2.4)

$$\begin{aligned} |\beta_1 - \beta_2| &= \left| \lim_{i \rightarrow \infty} s_i - \gamma_1(s_i)_1 - \lim_{i \rightarrow \infty} s_i - \gamma_2(s_i)_1 \right| \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} |\gamma_1(s_i)_1 - \gamma_2(s_i)_1| \\ &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \gamma_1(s_i)_2 + d(\gamma_1(s_i), \gamma_2(s_i)) + \gamma_2(s_i)_2 \right) \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \left( \gamma_1(s_i)_2 + \tilde{d}(\gamma_1, \gamma_2) + \gamma_2(s_i)_2 \right) \\ &= \tilde{d}(\gamma_1, \gamma_2) \end{aligned}$$

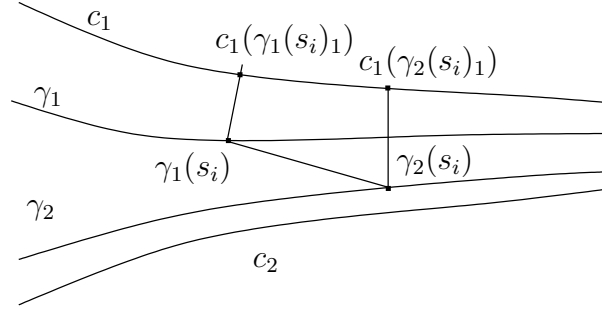


Abbildung 2.4:

und somit

$$\begin{aligned}
 d(T(\gamma_1)(t), T(\gamma_2)(t)) &= d(\gamma_1(t - \beta_1), \gamma_2(t - \beta_2)) \\
 &\leq d(\gamma_1(t - \beta_1), \gamma_1(t - \beta_2)) + d(\gamma_1(t - \beta_2), \gamma_2(t - \beta_2)) \\
 &\leq |\beta_1 - \beta_2| + \tilde{d}(\gamma_1, \gamma_2) \leq 2 \tilde{d}(\gamma_1, \gamma_2)
 \end{aligned}$$

□

BEWEIS (VON LEMMA 2.2.10):

Mit den Bezeichnungen aus obigem Beweis definieren wir  $\tilde{s}_i := s_i - \beta$ . Wegen  $\tilde{\gamma}(\tilde{s}_i)_1 = \gamma(s_i)_1$  gilt  $|\tilde{s}_i - \tilde{\gamma}(\tilde{s}_i)_1| = |s_i - \beta - \gamma(s_i)_1| \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$ .

Für  $s \leq \tilde{s}_i$  gilt:

$$|s - \tilde{\gamma}(s)_1| \leq |\mathcal{L}(\tilde{\gamma}, s, \tilde{s}_i)| + |\tilde{s}_i - \tilde{\gamma}(\tilde{s}_i)_1|$$

Somit folgt aus Lemma 2.2.4, dass

$$|s - \tilde{\gamma}(s)_1| \rightarrow 0, \quad \text{falls } s \rightarrow -\infty$$

Der Grenzwert ist somit gleich 0 und wir können folgern

$$\begin{aligned}
 s - \tilde{\gamma}(s)_1 &= 2s - (\tilde{\gamma}(s)_1 - \tilde{\gamma}(-s)_1) + (-s - \tilde{\gamma}(-s)_1) \\
 &\rightarrow \mathcal{L}(\tilde{\gamma}) + 0, \quad \text{falls } s \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

□

**2.2.11 Folgerung (1)** *Es existiert genau eine Parametrisierung für  $c_2$ , so dass*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(c_1(t), c_2(t)) = 0 \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} d(c_1(t), c_2(t)) = 0.$$

**2.2.12 Bemerkung** Wir werden im Folgenden annehmen, dass  $c_2 = T(c_2)$  gilt.

Wir definieren nun

**2.2.13 Definition**

Der Raum der umparametrisierten Kurven sei

$$\widehat{\Omega} := T(\overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega}.$$

Die Menge der Homotopien zwischen  $c_1$  und  $c_2$  aus  $\widehat{\Omega}$  sei

$$\widehat{\mathcal{H}} := \{H : [0, 1] \rightarrow \widehat{\Omega} \mid H \text{ stetig und } H(0) = c_1, H(1) = c_2\}.$$

Außerdem definieren wir:

$$\widehat{\Omega}^B := \{\gamma \in \widehat{\Omega} \mid \mathcal{L}(\gamma) \leq B\} \quad \widehat{\Omega}^{<B} := \{\gamma \in \widehat{\Omega} \mid \mathcal{L}(\gamma) < B\}$$

**2.2.14 Bemerkung** Sei  $\overline{\mathcal{H}} := \{H \in \mathcal{H} \mid \forall \tau \in [0, 1] : H(\tau) \in \overline{\Omega}\}$ . Da die Abbildung  $T$  aus Satz 2.2.9 stetig ist, wird durch die Zuordnung  $H(\tau) \mapsto T(H(\tau))$  eine Abbildung  $\tilde{T} : \overline{\mathcal{H}} \rightarrow \widehat{\mathcal{H}}$  definiert. Da  $\mathcal{L}$  invariant unter  $T$  ist, gilt insbesondere

$$\max_{\tau \in [0, 1]} \mathcal{L}(H(\tau)) = \max_{\tau \in [0, 1]} \mathcal{L}(\tilde{T}(H)(\tau)). \quad (2.9)$$

**2.2.15 Folgerung (2)** Sei  $\gamma \in \widehat{\Omega}$ , so gilt

$$\mathcal{L}(\gamma) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(c_1(t), \gamma(t)).$$

BEWEIS:

Es gilt

$$\begin{aligned} |d(c_1(t), \gamma(t)) - \mathcal{L}(\gamma)| &= |d(c_1(t), \gamma(t)) - d(c_1(t - \mathcal{L}(\gamma)), c_1(t))| \\ &\leq d(\gamma(t), c_1(t - \mathcal{L}(\gamma))) \rightarrow 0, \text{ wenn } t \rightarrow \infty \end{aligned} \quad \square$$

**2.2.16 Folgerung (3)**

Das Funktional  $\mathcal{L} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^+$  ist Lipschitz-stetig.

BEWEIS:

Seien zunächst  $\gamma_1, \gamma_2 \in \overline{\Omega}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}(\gamma_1) - \mathcal{L}(\gamma_2)| &= |\mathcal{L}(T\gamma_1) - \mathcal{L}(T\gamma_2)| \\
 &= \left| \lim_{s \rightarrow \infty} d(c_1(s), T\gamma_1(s)) - \lim_{s \rightarrow \infty} d(c_1(s), T\gamma_2(s)) \right| \\
 &= \lim_{s \rightarrow \infty} |d(c_1(s), T\gamma_1(s)) - d(c_1(s), T\gamma_2(s))| \\
 &\leq \lim_{s \rightarrow \infty} d(T\gamma_1(s), T\gamma_2(s)) \\
 &\leq \tilde{d}(T\gamma_1, T\gamma_2) \leq L_T \tilde{d}(\gamma_1, \gamma_2),
 \end{aligned}$$

wobei  $L_T$  eine Lipschitzkonstante von  $T$  bezeichnet. □

**2.2.17 Bemerkung** Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir nun die Rolle von  $c_2$ . Die Grundsituation ist vollkommen symmetrisch bezüglich  $c_1$  und  $c_2$ . Die Wahl der Karte und somit auch das Funktional  $\mathcal{L}$  ist jedoch von  $c_1$  abhängig. Es wäre also möglich, dass dieselbe Konstruktion mit  $c_2$  ein anderes Funktional definiert. Dies würde bedeuten, dass auch die Minimax-Geodätischen davon abhängig wären. Dies ist jedoch nicht der Fall: Für  $p \in S$  sei  $p_a$  die Orthogonalprojektion von  $p$  auf  $c_2$ . Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass diese auf ganz  $S$  eindeutig ist. So gilt, falls  $\gamma \in \Omega$  eigentlich ist für  $|s| \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned}
 |\gamma(s)_a - \gamma(s)_1| &= d(c_1(\gamma(s)_1), c_1(\gamma(s)_a)) \\
 &\leq d(c_1(\gamma(s)_1), \gamma(s)) + d(\gamma(s), c_2(\gamma(s)_a)) \\
 &\quad + d(c_2(\gamma(s)_a), c_1(\gamma(s)_a)) \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Sonst erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 |\gamma(s)_a - \gamma(s)_1| &\leq d(c_1(\gamma(s)_1), \gamma(s)) + d(\gamma(s), c_2(\gamma(s)_a)) \\
 &\quad + d(c_2(\gamma(s)_a), c_1(\gamma(s)_a)) \\
 &\leq \sup_{p \in S} d(c_1, p) + \sup_{p \in S} d(c_2, p) + \tilde{d}(c_1, c_2)
 \end{aligned}$$

In beiden Fällen folgt nach dem Grenzwertübergang die Behauptung.

## 2.3 Der Birkhoffsche Verkürzungsprozess auf $\widehat{\Omega}$

Wir möchten nun den Birkhoffschen Verkürzungsprozess auf  $\widehat{\Omega}$  definieren: Dazu wählen wir  $h < \text{inj}_S(S)$  und  $z \in [0, h)$  fest und definieren für  $i \in \mathbb{Z}$  die Parameter  $\xi_i := ih + z$ . Sei  $\gamma \in \widehat{\Omega}$ , so existiert nach Lemma 1.4.3 eine Kurve  $\bar{\gamma} \in \Omega$ , die je zwei aufeinander folgende Punkte  $\gamma(\xi_i), \gamma(\xi_{i+1})$  durch ein minimales Segment verbindet. Bezeichne  $(\zeta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  diejenige monoton wachsende



Folge in  $\mathbb{R}$ , für die gilt:

$$\gamma(\xi_i) = \bar{\gamma}(\zeta_i), \quad (2.10)$$

so gilt mit Folgerung 2.2.5:

$$\mathcal{L}(\bar{\gamma}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}(\bar{\gamma}, \zeta_i, \zeta_{i+1}) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}(\gamma, \xi_i, \xi_{i+1}) = \mathcal{L}(\gamma) < \infty. \quad (2.11)$$

Aufgrund der vorhergehenden Überlegungen, können wir also annehmen, dass  $\bar{\gamma} \in \widehat{\Omega}$  liegt und somit eindeutig festgelegt ist. Wir definieren die Abbildung  $\mathcal{D} : \widehat{\Omega} \rightarrow \widehat{\Omega}$  durch die Zuordnung  $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ . Unser Ziel ist es nun folgenden Satz zu beweisen

**2.3.1 Satz** *Die Abbildung  $\mathcal{D} : \widehat{\Omega} \rightarrow \widehat{\Omega}$  ist stetig und  $\mathcal{L}$ -verkürzend, das heißt für alle  $\gamma \in \widehat{\Omega}$  gilt  $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\gamma)) \leq \mathcal{L}(\gamma)$ , und aus  $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\gamma)) = \mathcal{L}(\gamma)$  folgt schon  $\mathcal{D}(\gamma) = \gamma$ .*

Diese Aussage folgt für den klassischen Birkhoffschen Verkürzungsprozess (vgl. 1.3) direkt aus der Kompaktheit von Definitions- und Zielmenge. Die Übertragung auf unseren Fall ist somit nicht sofort möglich, vielmehr wäre die Aussage sogar falsch, würden wir Kurven mit  $\mathcal{L} = \infty$  zulassen. Der nun folgende Abschnitt verdeutlicht jedoch die speziellen Eigenschaften der Kurven mit endlicher  $\mathcal{L}$ -Länge. Bezeichnen wir Kurvensegmente der Form  $\gamma|_{(-\infty, a)}$  oder  $\gamma|_{(a, \infty)}$  mit  $a \in \mathbb{R}$  als *Kurvenenden*, so bestehen Kurven endlicher  $\mathcal{L}$ -Länge aus einem kompakten Segment, das fast die gesamte „zusätzliche Länge“  $\mathcal{L}$  verbraucht und zwei „fast-minimalen“ Kurvenenden. Diese sind auf gewisse Weise „starr“ und der Verkürzungsprozess ändert sie nur wenig ab.

Um dies exakt zu beschreiben, wählen wir reelle Zahlen  $s_1 < s_2$  und zerlegen das Funktional  $\mathcal{L} : \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^+$  in drei Teile  $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}^-(\gamma, s_1) + \mathcal{L}(\gamma, s_1, s_2) + \mathcal{L}^+(\gamma, s_2)$ , die jedes Segment einzeln der Länge nach mit  $c_1$  vergleichen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^-(\gamma, s_1) &:= \lim_{s \rightarrow -\infty} \mathcal{L}(\gamma, s, s_1) \stackrel{2.2.10}{=} s_1 - \gamma(s_1)_1 \\ \mathcal{L}^+(\gamma, s_2) &:= \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma, s_2, s) \stackrel{2.2.10}{=} \mathcal{L}(\gamma) - (s_2 - \gamma(s_2)_1) \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.2.10 folgt nun auch sofort

**2.3.2 Lemma** *Sei  $\gamma \in \widehat{\Omega}$ , so gilt*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \mathcal{L}^-(\gamma, s) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}^+(\gamma, s) = 0.$$

Analog zur Diskussion zu Beginn von Kapitel 2.2 erhalten wir nach dem Grenzwertübergang aus (2.4) auch folgende Abschätzungen

$$\mathcal{L}^-(\gamma, s) \geq -\gamma(s)_2 \text{ und } \mathcal{L}^+(\gamma, s) \geq -\gamma(s)_2 \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

und können analog zu (2.5) folgern, dass

$$L(\gamma|_{[t_1, t_2]}) \leq d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) + \mathcal{L}^-(\gamma, s_1) + \gamma(s_1)_2 \quad \forall t_1 \leq t_2 \leq s_1$$

$$L(\gamma|_{[t_1, t_2]}) \leq d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) + \mathcal{L}^+(\gamma, s_2) + \gamma(s_2)_2 \quad \forall t_2 \geq t_1 \geq s_2$$

Betrachten wir folgendes Lemma

**2.3.3 Lemma** *Seien  $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{\Omega}$ . So gilt für alle  $s \in \mathbb{R}$ :*

$$\begin{aligned} d(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) &\leq |\mathcal{L}^-(\gamma_1, s)| + |\mathcal{L}^-(\gamma_2, s)| + \gamma_1(s)_2 + \gamma_2(s)_2 \\ \text{und} \\ d(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) &\leq |\mathcal{L}^+(\gamma_1, s)| + |\mathcal{L}^+(\gamma_2, s)| + \gamma_1(s)_2 + \gamma_2(s)_2 \\ &\quad + |\mathcal{L}(\gamma_1) - \mathcal{L}(\gamma_2)| \end{aligned}$$

BEWEIS:

Für die Projektion auf  $c_1$  gelten folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned} |\gamma_1(s)_1 - \gamma_2(s)_1| &\leq |\mathcal{L}^-(\gamma_1, s)| + |\mathcal{L}^-(\gamma_2, s)| \\ |\gamma_1(s)_1 - \gamma_2(s)_1| &\leq |\mathcal{L}^+(\gamma_1, s)| + |\mathcal{L}(\gamma_2) - \mathcal{L}(\gamma_1)| + |\mathcal{L}^+(\gamma_2, s)| \end{aligned} \quad (2.13)$$

Die Behauptung folgt nun aus

$$d(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \leq \gamma_1(s)_2 + |\gamma_1(s)_1 - \gamma_2(s)_1| + \gamma_2(s)_2 \quad \square$$

Dieses Lemma zeigt, dass der Abstand der Kurvenenden zweier Kurven mit gleicher  $\mathcal{L}$ -Länge beliebig gut abgeschätzt werden kann, und deutet so auf einen Zusammenhang von kompakt-gleichmäßiger Konvergenz und Konvergenz bezüglich der Metrik  $\tilde{d}$  auf  $\widehat{\Omega}$  hin, wobei eine Folge  $\{\gamma_n\} \subset \widehat{\Omega}$  *kompakt-gleichmäßig gegen  $\gamma \in \widehat{\Omega}$  konvergiert*, wenn zu jedem Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}$  und für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n \geq N$  gilt:

$$\max_{t \in K} d(\gamma(t), \gamma_n(t)) < \varepsilon.$$

Da der Bildraum der Kurven eine Mannigfaltigkeit ist, entspricht dieser Konvergenzbegriff der Konvergenz bezüglich der schwachen Topologie. Bevor wir jedoch näher auf den Zusammenhang der beiden Konvergenzbegriffe eingehen können, benötigen wir gleichmäßige Abschätzungen für den Abstand zu  $c_1$ :

**2.3.4 Lemma**

Seien (mit den Bezeichnungen aus 1.7.3)  $t_1 < t_2 \in T$ , so existiert zu jedem  $B > 0$  ein kompaktes Intervall  $I(t_1, t_2, B) \subset \mathbb{R}$ , so dass

$$\gamma(s) \in S \setminus M(t_1, t_2) \quad \forall s \in \mathbb{R} \setminus I(t_1, t_2, B) \quad \forall \gamma \in \widehat{\Omega}^B.$$

Speziell existiert zu jedem  $0 < \delta < \varepsilon_0$  und  $B > 0$  ein Intervall  $I_\delta(B)$ , so dass

$$\gamma(s) \in E(\delta) \text{ und somit } \mathcal{L}^\pm(\gamma, s) \geq -\delta \quad \forall s \in \mathbb{R} \setminus I_\delta(B) \quad \forall \gamma \in \widehat{\Omega}^B.$$

BEWEIS (VON LEMMA 2.3.4):

Sei  $\gamma \in \widehat{\Omega}^B$  und  $s_1, s_2$  Schnittstellen von  $\gamma$  mit den normalen Geodätischen  $\tilde{N}_{t_1}, \tilde{N}_{t_2}$  (vgl. Definition vor Lemma 2.2.8), so ist  $\gamma(s_1)_1 = t_1$  und  $\gamma(s_2)_1 = t_2$ . Mit (2.12) folgt nun:

$$\begin{aligned} s_1 &\geq t_1 - \gamma(s_1)_2 \geq t_1 - \sup_{p \in S} d(p, c_1) =: k_1 \\ s_2 &\leq t_2 + \mathcal{L}(\gamma) + \gamma(s_2)_2 \leq t_2 + B + \sup_{p \in S} d(p, c_1) =: k_2 \end{aligned}$$

Somit erfüllt  $I(t_1, t_2, B) := [k_1, k_2]$  die oben geforderte Bedingung. Die zweite Aussage folgt nun sofort mit (2.12).  $\square$

Wir beschreiben nun den Zusammenhang der durch  $\tilde{d}$  induzierten Topologie mit der schwachen Topologie auf  $\widehat{\Omega}$  anhand von Folgen.

**2.3.5 Satz** *Eine Folge  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \widehat{\Omega}$  konvergiert genau dann bezüglich der Metrik  $\tilde{d}$  gegen  $\gamma \in \widehat{\Omega}$ , wenn  $\gamma_n$  kompakt gleichmäßig gegen  $\gamma$  konvergiert und für die Funktionswerte gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma_n) = \mathcal{L}(\gamma)$ .*

BEWEIS:

Die eine Richtung folgt sofort aus der Stetigkeit von  $\mathcal{L}$ . Betrachten wir also eine kompakt gleichmäßig konvergente Folge  $(\gamma_n)$  aus  $\widehat{\Omega}$  mit Grenzwert  $\gamma$ , so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma_n) = \mathcal{L}(\gamma)$ . Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben und  $\delta < \min\{\frac{\varepsilon}{8}, \varepsilon_0\}$  fest, so bestimmen wir zu  $B := \sup_n \mathcal{L}(\gamma_n)$  ein Intervall  $I_\delta(B)$  wie in Lemma 2.3.4. Lemma 2.3.2 erlaubt nun,  $s_-, s_+ \in \mathbb{R} \setminus I_\delta(B)$  so zu wählen, dass

$$|\mathcal{L}^-(\gamma, s)| \leq \delta \quad \forall s \leq s^- \quad \text{und} \quad |\mathcal{L}^+(\gamma, s)| \leq \delta \quad \forall s \geq s^+ \quad (2.14)$$

Da  $\gamma(s_\pm)$  insbesondere im Kartengebiet der Fermikoordinaten liegen, ist die Projektion  $\gamma(s_\pm) \mapsto \gamma(s_\pm)_1$  eine bzgl. der kompakt gleichmäßigen Konvergenz folgenstetige Abbildung und wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma_n) = \mathcal{L}(\gamma)$  folgt dann auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}^\pm(\gamma_n, s_\pm) = \mathcal{L}^\pm(\gamma, s_\pm)$ .

Wir wählen nun  $N \in \mathbb{N}$  so groß, dass für alle  $n \geq N$  gilt:

1.  $\max_{s \in [s_-, s_+]} d(\gamma_n(s), \gamma(s)) < \varepsilon$
2.  $|\mathcal{L}^\pm(\gamma_n, s_\pm)| \leq 2\delta$
3.  $|\mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}(\gamma_n)| \leq \delta$

Wegen 1 genügt es zu zeigen, dass auch  $\sup_{\mathbb{R} \setminus [s_-, s_+]} d(\gamma_n(s), \gamma(s)) < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ . Sei nun  $n \geq N$  fest. Zunächst gilt wegen  $\gamma_n \in \widehat{\Omega}^B$ , dass  $\gamma_n(s)_2 \leq \delta$  für alle  $s \in \mathbb{R} \setminus (s_-, s_+)$ . Somit folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^-(\gamma_n, s) &= \mathcal{L}^-(\gamma_n, s^-) - \mathcal{L}(\gamma_n, s, s^-) \\ &\stackrel{(2.4)}{\leq} \mathcal{L}^-(\gamma_n, s^-) + 2\delta \leq 4\delta, \quad \forall s \leq s^- \end{aligned}$$

Mit Ungleichung (2.12) folgt dann bereits

$$|\mathcal{L}^-(\gamma_n, s)| \leq 4\delta, \quad \forall s \leq s^- \quad (2.15)$$

und analog

$$|\mathcal{L}^+(\gamma_n, s)| \leq 4\delta, \quad \forall s \geq s^+ \quad (2.16)$$

Wenden wir nun Lemma 2.3.3 an:

$$\begin{aligned} d(\gamma(s), \gamma_n(s)) &\leq |\mathcal{L}^-(\gamma, s)| + |\mathcal{L}^-(\gamma_n, s)| + \gamma(s)_2 + \gamma_n(s)_2 \\ &\leq 7\delta < \varepsilon && \forall s < s^- \text{ und} \\ d(\gamma(s), \gamma_n(s)) &\leq |\mathcal{L}^+(\gamma, s)| + |\mathcal{L}^+(\gamma_n, s)| + \gamma_1(s)_2 \\ &\quad + \gamma_2(s)_2 + |\mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}(\gamma_n)| \\ &\leq 8\delta < \varepsilon && \forall s > s^+ \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Behauptung.  $\square$

Kommen wir nun zum Verkürzungsprozess zurück:

### 2.3.6 Lemma

Der Verkürzungsprozess  $\mathcal{D} : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$  ist  $\mathcal{L}^-$ - und  $\mathcal{L}^+$ -verkürzend, das heißt  $\mathcal{L}^-(\mathcal{D}\gamma, \zeta_i) \leq \mathcal{L}^-(\gamma, \xi_i)$  und  $\mathcal{L}^+(\mathcal{D}\gamma, \zeta_i) \leq \mathcal{L}^+(\gamma, \xi_i)$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$ , wobei  $\zeta_i$  wie in (2.10) definiert ist.

BEWEIS:

Wir berechnen

$$\mathcal{L}^-(\gamma, \xi_i) = \sum_{k < i} \mathcal{L}(\gamma, \xi_k, \xi_{k+1}) \geq \sum_{k < i} \mathcal{L}(\mathcal{D}\gamma, \zeta_k, \zeta_{k+1}) = \mathcal{L}^-(\mathcal{D}\gamma, \zeta_i). \quad (2.17)$$

Wegen  $\mathcal{L}^+(\gamma, \xi_i) = \sum_{k \geq i} \mathcal{L}(\gamma, \xi_k, \xi_{k+1})$  folgt die Abschätzung auf gleiche Weise für das Funktional  $\mathcal{L}^+$ .  $\square$

**2.3.7 Lemma**

Sei  $B > 0$  und  $K \subset \mathbb{R}$  kompakt, so existiert eine kompakte Teilmenge  $M_K(B)$  von  $S$ , so dass  $\gamma|_K \subset M_K(B)$  für alle  $\gamma \in \widehat{\Omega}^B$ .

BEWEIS:

Aus den Ungleichungen 2.12 folgt

$$\gamma(s)_1 \leq s + \gamma(s)_2 \quad \gamma(s)_1 \geq s - \mathcal{L}(\gamma) - \gamma(s)_2.$$

Wir können nun für alle  $s \in K$  folgern, dass die Projektion auf  $c_1$  folgende Abschätzungen erfüllt:

$$\gamma(s)_1 \leq \max K + \sup_{p \in S} d(p, c_1) =: r \quad \gamma(s)_1 \geq \min K - B - \sup_{p \in S} d(p, c_1) =: l$$

Somit erfüllt  $M_K(B) := M(l, r)$ , falls diese Menge wohldefiniert ist (vgl. Bezeichnung 1.7.3), die oben geforderte Bedingung. Sonst betrachte  $M(l', r')$  mit  $l' := \sup\{t \leq l \mid h_{\varepsilon_0}(t) < \varepsilon_0\}$  und  $r' := \inf\{t \geq r \mid h_{\varepsilon_0}(t) < \varepsilon_0\}$ .  $\square$

**2.3.8 Satz** Die Abbildung  $\mathcal{L} \circ \mathcal{D} : \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig (bzgl.  $\mathcal{O}^{\vec{d}}$ ).

BEWEIS:

Sei  $\gamma_n \rightarrow \gamma$  eine konvergente Folge und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Sei weiterhin  $\delta := \frac{\varepsilon}{9}$  und  $B = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(\gamma_n)$ , so wählen wir  $I_\delta(B)$  wie in Lemma 2.3.4 und  $i \in \mathbb{N}$  so groß, dass

$$I_\delta(B) \subset [\xi_{-i}, \xi_i] \quad \text{und} \quad |\mathcal{L}^\pm(\gamma, \xi_{\pm i})| \leq \delta. \quad (2.18)$$

Außerdem gilt mit  $(\zeta_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}, (\zeta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  wie in 2.10:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathcal{D}\gamma_n|_{[\zeta_{-i}^n, \zeta_i^n]}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-i}^{i-1} d(\gamma_n(\xi_j), \gamma_n(\xi_{j+1})) \\ &= \sum_{j=-i}^{i-1} d(\gamma(\xi_j), \gamma(\xi_{j+1})) = L(\mathcal{D}\gamma|_{[\xi_{-i}, \xi_i]}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Sei nun  $N \in \mathbb{N}$  so groß, dass für alle  $n \geq N$  gilt:

1.  $|\gamma(\xi_{-i})_1 - \gamma_n(\xi_{-i})_1| \leq \delta$  und  $|\gamma(\xi_i)_1 - \gamma_n(\xi_i)_1| \leq \delta$
2.  $|\mathcal{L}^\pm(\gamma_n, \xi_{\pm i})| \leq 2\delta$
3.  $|L(\mathcal{D}\gamma|_{[\xi_{-i}, \xi_i]}) - L(\mathcal{D}\gamma_n|_{[\zeta_{-i}^n, \zeta_i^n]})| \leq \delta$
4.  $|\mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}(\gamma_n)| \leq \delta,$

so können wir für alle  $n \geq N$  abschätzen:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}(\mathcal{D}\gamma) - \mathcal{L}(\mathcal{D}\gamma_n)| &\leq |\mathcal{L}^-(\mathcal{D}\gamma, \zeta_{-i}) - \mathcal{L}^-(\mathcal{D}\gamma_n, \zeta_{-i}^n)| \\
 &\quad + |\mathcal{L}(\mathcal{D}\gamma, \zeta_{-i}, \zeta_i) - \mathcal{L}(\mathcal{D}\gamma_n, \zeta_{-i}^n, \zeta_i^n)| \\
 &\quad + |\mathcal{L}^+(\mathcal{D}\gamma, \zeta_i) - \mathcal{L}^+(\mathcal{D}\gamma_n, \zeta_i^n)| \\
 &\stackrel{(2.18), \text{Bed. 2}}{\leq} 6\delta + |L(\mathcal{D}\gamma|_{[\zeta_{-i}, \zeta_i]}) - L(\mathcal{D}\gamma_n|_{[\zeta_{-i}^n, \zeta_i^n]})| \\
 &\quad + |\mathcal{D}\gamma(\zeta_{-i})_1 - \mathcal{D}\gamma_n(\zeta_{-i}^n)_1| + |\mathcal{D}\gamma(\zeta_i)_1 - \mathcal{D}\gamma_n(\zeta_i^n)_1| \\
 &\stackrel{(2.10), \text{Bed. 3}}{\leq} 6\delta + \delta + |\gamma(\xi_{-i})_1 - \gamma_n(\xi_{-i})_1| + |\gamma(\xi_i)_1 - \gamma_n(\xi_i)_1| \\
 &\stackrel{(2.13)}{\leq} 7\delta + 2\delta = 9\delta = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

□

BEWEIS (VON SATZ 2.3.1):

Sei  $(\gamma_n)$  eine konvergente Folge mit Grenzwert  $\gamma$  und  $(\zeta_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}, (\zeta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  wie in 2.10. Wir wissen bereits, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\mathcal{D}\gamma_n) = \mathcal{L}(\mathcal{D}\gamma). \quad (2.20)$$

Mit Satz 2.3.5 genügt es also zu zeigen, dass  $(\mathcal{D}\gamma_n)$  kompakt gleichmäßig gegen  $\mathcal{D}\gamma$  konvergiert. Mit dem klassischen Birkhoffschen Verkürzungsprozess aus Abschnitt 1.3 kann man die Aussage leicht einsehen, wenn man die Parametrisierung vernachlässigt. Da in dem hier betrachteten Fall unendlich viele Segmente durch ein minimales Segment ersetzt werden, ist es zunächst nicht klar, dass auch die Parameterverschiebung stetig ist. Dass dies trotzdem stimmt, liegt daran, dass  $\mathcal{L} < \infty$ . Die Idee ist nun erneut ausreichend große Segmente zu betrachten, so dass die Verkürzung auf den übrig bleibenden Kurvenenden die Parametrisierung nur wenig verschiebt.

Sei also ein beliebiges Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wir definieren  $B := \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(\gamma_n)$  und  $\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{5}, \frac{h}{5}\}$ . Nun existiert ein  $i \in \mathbb{N}$ , so dass mit  $I_\delta(B)$  wie in Lemma 2.3.4

$$\xi_{-i} \in I_\delta(B), \quad |\mathcal{L}^\pm(\gamma, \xi_{\pm i})| \leq \delta \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_{2h}(K) \subset [\zeta_{-i}, \zeta_i] \quad (2.21)$$

Nach Lemma 2.3.7 existiert nun eine kompakte Teilmenge in  $S$ , die wir  $\tilde{N}$  nennen, so dass alle Segmente  $\gamma_n|_{[\xi_{-i}, \xi_i]}$  in  $\tilde{N}$  enthalten sind. Für geeignete Wahlen von  $\kappa$  und  $k$  stimmen dann die Segmente  $D(1, \gamma_n|_{[\xi_{-i}, \xi_i]})$  mit  $\mathcal{D}\gamma_n|_{[\zeta_{-i}, \zeta_i]}$  bis auf Parametrisierung überein, wobei  $D(1, \cdot)$  wie in 1.3.2 definiert ist. Da  $D(1, \cdot)$  stetig ist, und auch die Längen der betrachteten Segmente konvergieren (vgl.

2.19), existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq N$  gilt:

$$|L(\mathcal{D}\gamma|_{[\zeta_{-i}, \zeta_i]}) - L(\mathcal{D}\gamma_n|_{[\zeta_{-i}^n, \zeta_i^n]})| = |(\zeta_i - \zeta_{-i}) - (\zeta_i^n - \zeta_{-i}^n)| \leq \delta, \quad (2.22)$$

$$d(\mathcal{D}\gamma(\zeta_{-i} + \sigma), \mathcal{D}\gamma_n(\zeta_{-i}^n + \sigma)) \leq \delta \quad \forall \sigma \leq l_{\min} := \inf_{n \geq N} \{\zeta_i^n - \zeta_{-i}^n\}. \quad (2.23)$$

und wegen  $\gamma(\xi_{-i}) \in E(\delta)$  auch

$$|\gamma(\xi_{-i})_1 - \gamma_n(\xi_{-i})_1| \leq \delta \quad (2.24)$$

Wegen (2.20) und  $\gamma_n(\xi_{\pm i}) \in E(\delta)$  folgt wie im Beweis von 2.3.5 für ein möglicherweise größeres  $N \in \mathbb{N}$  auch

$$|\mathcal{L}^\pm(\gamma_n, \xi_{\pm i})| \leq 2\delta \quad \forall n \geq N.$$

Da  $\mathcal{D}\gamma_n(\zeta_{\pm i}) = \gamma_n(\xi_{\pm i}) \in E(\delta)$  folgt nun aus Lemma 2.3.4  $\mathcal{L}^\pm(\mathcal{D}\gamma_n, \zeta_{\pm i}) \geq -\delta$ , und mit Lemma 2.3.6 erhalten wir dann:

$$|\mathcal{L}^\pm(\mathcal{D}\gamma_n, \zeta_{\pm i})| \leq 2\delta \quad \forall n \geq N. \quad (2.25)$$

Betrachten wir zunächst die Parameter der Anfangs- und Endpunkte: Es gilt für alle  $n \geq N$ :

$$\begin{aligned} |\zeta_{-i} - \zeta_{-i}^n| &\leq |\mathcal{L}^-(\mathcal{D}\gamma, \zeta_{-i})| + |\mathcal{D}\gamma(\zeta_{-i})_1 - \mathcal{D}\gamma_n(\zeta_{-i}^n)_1| + |\mathcal{L}^-(\mathcal{D}\gamma_n, \zeta_{-i}^n)| \\ &\stackrel{(2.21), (2.25)}{\leq} 3\delta + |\gamma(\xi_{-i})_1 - \gamma_n(\xi_{-i})_1| \\ &\stackrel{(2.24)}{\leq} 3\delta + \delta = 4\delta < h \end{aligned}$$

und somit

$$|\zeta_i - \zeta_i^n| \leq |\zeta_i - \zeta_{-i} - (\zeta_i^n - \zeta_{-i}^n)| + |\zeta_{-i} - \zeta_{-i}^n| \stackrel{2.22}{\leq} 5\delta = h$$

Definieren wir nun  $\sigma := s - \zeta_{-i}$ , so folgt für alle  $s \in [\zeta_{-i}, \zeta_{-i} + l_{\min}]$ :

$$\begin{aligned} d(\mathcal{D}\gamma(s), \mathcal{D}\gamma_n(s)) &= d(\mathcal{D}\gamma(\zeta_{-i} + \sigma), \mathcal{D}\gamma_n(\zeta_{-i} + \sigma)) \\ &\leq d(\mathcal{D}\gamma(\zeta_{-i} + \sigma), \mathcal{D}\gamma_n(\zeta_{-i}^n + \sigma)) \\ &\quad + d(\mathcal{D}\gamma_n(\zeta_{-i}^n + \sigma), \mathcal{D}\gamma_n(\zeta_{-i} + \sigma)) \\ &\stackrel{(2.23)}{\leq} \delta + |\zeta_{-i} - \zeta_{-i}^n| \leq 5\delta < \varepsilon \end{aligned}$$

Mit den obigen Abschätzungen können wir jedoch auch folgern, dass  $l_{\min} \geq \zeta_i - \zeta_{-i} - 2h$  und somit  $K \subset [\zeta_{-i}, \zeta_{-i} + l_{\min}]$ . Somit haben wir die erste Behauptung gezeigt. Die zweite Aussage folgt aus 2.11, wobei Gleichheit genau dann auftritt, wenn alle Kurvensegmente  $\gamma|_{[\xi_i, \xi_{i+1}]}$  bereits minimal sind.  $\square$

Wie im kompakten Fall wenden wir nun den Verkürzungsprozess zweimal an, wobei wir im zweiten Schritt die festgehaltenen Punkte um ein halbes Intervall versetzt wählen: Dazu bezeichnen wir mit  $\mathcal{D}^z$  den Verkürzungsprozess  $\mathcal{D}$ , der durch die Stellen  $\xi_i = hi + z$  festgelegt wird, und definieren  $\overline{\mathcal{D}} := \mathcal{D}^{\frac{h}{2}} \circ \mathcal{D}^0 : \widehat{\Omega} \rightarrow \widehat{\Omega}$ .

**2.3.9 Folgerung** *Die Abbildung  $\overline{\mathcal{D}} : \widehat{\Omega} \rightarrow \widehat{\Omega}$  ist stetig und  $\mathcal{L}$ -verkürzend. Es gilt  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}(\gamma)) = \mathcal{L}(\gamma)$  genau dann, wenn  $\gamma$  eine Geodätische ist.*

BEWEIS:

Da der Abstand zweier Schnittstellen kleiner ist, als der Injektivitätsradius, folgt aus  $\overline{\mathcal{D}}(\gamma) = \gamma$  schon, dass  $\gamma$  eine Geodätische ist. Somit folgt die Aussage direkt aus Satz 2.3.1.  $\square$

## 2.4 Die Palais-Smale-Bedingung für $\mathcal{L}$

Wir zeigen nun, dass  $\mathcal{L}$  die folgende Variante der Palais-Smale-Bedingung erfüllt:

### 2.4.1 Satz (Palais-Smale-Bedingung)

*Sei  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\widehat{\Omega}$ , so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}(\gamma_n)) = m$ . Dann existiert eine (bzgl.  $\tilde{d}$ ) konvergente Teilfolge  $\gamma_{n'} \rightarrow \gamma$  und der Grenzwert  $\gamma$  ist eine Geodätische mit  $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}(\gamma)) = m$ .*

Zunächst benötigen wir folgendes

**2.4.2 Lemma** *Sei  $B > 0$ , so existieren zu jedem  $\varepsilon > 0$  reelle Zahlen  $s^\pm$  und ein  $\delta > 0$ , so dass für jede Kurve  $\gamma$  in  $\widehat{\Omega}^B$  mit  $|\mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}\gamma)| < \delta$  gilt:*

$$|\mathcal{L}^\pm(\overline{\mathcal{D}}\gamma, s^\pm)| \leq \varepsilon$$

*Speziell gilt  $|\mathcal{L}^\pm(\gamma, s^\pm)| \leq \varepsilon$  für alle Geodätischen  $\gamma \in \widehat{\Omega}^B$ .*

BEWEIS:

Es genügt die Aussage für  $\varepsilon < \min\{h, \varepsilon_0\}$  zu zeigen, wobei  $h$  wie in Abschnitt 2.3 die Schrittweite des Verkürzungsprozesses  $\overline{\mathcal{D}}$  ist. Seien  $\delta = \varepsilon/16$ ,  $I_\delta(B)$  wie in Lemma 2.3.4 und  $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  eine Folge in  $\mathbb{R} \setminus I_\delta(B)$  wie in Lemma 2.2.8 zu  $c = \delta$ . Wir können o.E. annehmen, indem wir eventuell endlich viele Folgenglieder  $\{t_{-n}, \dots, t_{n-1}, t_n\}$  auslassen, dass

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} h(t_i) \leq \delta. \tag{2.26}$$



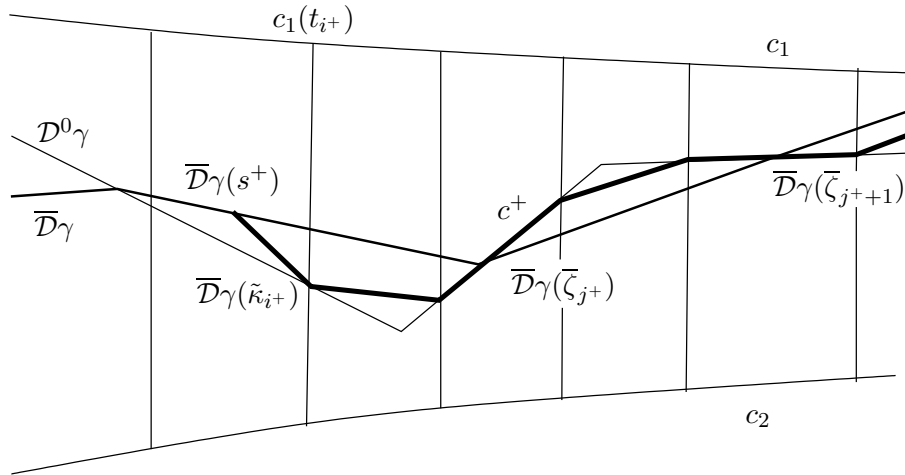


Abbildung 2.5: Konstruktion eines Kurvenendes

Da für die normalen geodätischen Segmente  $\tilde{N}(t_i)$  gilt  $L(\tilde{N}(t_i)) = h(t_i)$ , folgt insbesondere

$$d_H(\tilde{N}(t_{i-1}), \tilde{N}(t_i)) \leq L(\tilde{N}(t_{i-1})) + |t_i - t_{i-1}| + L(\tilde{N}(t_i)) \leq 3\delta \quad \forall i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Sei nun  $s^- < \min I(t_{-1} - h, t_0 + h, B)$  und  $s^+ > \max I(t_{-1} - h, t_0 + h, B)$  (vgl. Lemma 2.3.4), so sind die Kurvenenden  $\gamma|_{(-\infty, s^-]}$  und  $\gamma|_{[s^+, \infty)}$  für beliebiges  $\gamma \in \hat{\Omega}^B$  in  $S \setminus M(t_{-1} - h, t_0 + h)$  enthalten, insbesondere gilt

$$\min_i \max_{s \in [0,1]} d(\gamma(s^\pm), \tilde{N}(t_i)(s)) \leq 3\delta. \quad (2.27)$$

Wir möchten zeigen, dass die so gewählten Parameter  $s^\pm$  und  $\delta$  die geforderten Eigenschaften erfüllen:

Sei dazu  $\gamma \in \hat{\Omega}^B$  fest gewählt, so dass  $|\mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}\gamma)| \leq \delta$ . Wegen  $\gamma(s^\pm) \in E(\delta)$  erhalten wir die Abschätzung  $\mathcal{L}^\pm(\overline{\mathcal{D}}\gamma, s^\pm) \geq -\delta > -\varepsilon$  mit Ungleichung (2.12). Die zweite Abschätzung sollte man sich zunächst am Bild klarmachen: Dazu bezeichne  $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^{h/2} \circ \mathcal{D}^0$  wie in Abschnitt 2.3. Man verkürzt nun  $\mathcal{D}^0\gamma$ , indem man die Kurve zwischen je zwei Schnittpunkten mit den  $\tilde{N}(t_i)$  durch ein minimales Segment ersetzt. Da die Unterteilung durch die Folge  $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  ausreichend fein ist, sind die Enden der so entstandenen Kurve bzgl.  $\mathcal{L}^\pm$  länger als die von  $\overline{\mathcal{D}}\gamma$ . Die Abschätzung folgt dann im wesentlichen aus (2.26).

Seien dazu erneut  $(\zeta_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  und  $(\bar{\zeta}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  diejenigen monoton wachsenden Fol-

gen, für die für alle  $j \in \mathbb{Z}$  gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^0\gamma(\zeta_j) &= \gamma(\xi_j), & \text{wobei } \xi_j &:= jh, \\ \overline{\mathcal{D}}\gamma(\bar{\zeta}_j) &= \mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_j), & \text{wobei } \bar{\xi}_j &:= \xi_j + h/2 = jh + h/2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Es werden zunächst folgende Aussagen benötigt

**Behauptung I:** Die Verkürzungsprozesse  $\mathcal{D}^0$  und  $\mathcal{D}^{h/2}$  verkürzen jedes Segment  $\gamma|_{[\xi_j, \xi_{j+1}]}$  bzw.  $\mathcal{D}^0\gamma|_{[\bar{\xi}_j, \bar{\xi}_{j+1}]}$  um höchstens  $\delta$ , d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} d(\gamma(\xi_j), \gamma(\xi_{j+1})) &= d(\mathcal{D}^0\gamma(\zeta_j), \mathcal{D}^0\gamma(\zeta_{j+1})) > 15\delta \\ \text{und} \\ d(\mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_j), \mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_{j+1})) &= d(\overline{\mathcal{D}}\gamma(\bar{\zeta}_j), \overline{\mathcal{D}}\gamma(\bar{\zeta}_{j+1})) > 15\delta \end{aligned}$$

**Behauptung II:** Die Parametrisierung wird durch  $\mathcal{D}^0$  bzw.  $\mathcal{D}^{h/2}$  um höchstens  $\delta$  verschoben, d.h. es gilt für alle  $j \in \mathbb{Z}$

$$|\xi_j - \zeta_j| < \delta \quad \text{und} \quad |\bar{\xi}_j - \bar{\zeta}_j| < \delta.$$

**Behauptung III:** Die Kurvenenden von  $\mathcal{D}^0\gamma_{(-\infty, s^-]}$ ,  $\mathcal{D}^0\gamma_{[s^+, \infty)}$ ,  $\overline{\mathcal{D}}\gamma_{(-\infty, s^-]}$  und  $\overline{\mathcal{D}}\gamma_{[s^+, \infty)}$  lassen sich als Graph über  $c_1$  darstellen, es gilt sogar, dass  $\mathcal{D}^0\gamma$  und  $\overline{\mathcal{D}}\gamma$  jedes (minimale) geodätische Segment  $\tilde{N}(t)$  für  $t \in \mathbb{R} \setminus [t^-(\delta), t^+(\delta)]$  genau einmal schneidet.

Wir zeigen zunächst, dass aus diesen Behauptungen die Aussage des Lemmas folgt: Bezeichne

$$j^- := \max\{j \in \mathbb{Z} \mid \bar{\zeta}_j \leq s^-\}; \quad j^+ := \min\{j \in \mathbb{Z} \mid s^+ \leq \bar{\zeta}_j\}$$

und  $(\kappa_i)$  bzw.  $(\bar{\kappa}_i)$  die (eindeutig bestimmten) Schnittstellen von  $\mathcal{D}^0\gamma$  bzw.  $\overline{\mathcal{D}}\gamma$  mit  $\tilde{N}(t_i)$ , so definieren wir

$$i^- := \max\{i \mid \tilde{\kappa}_i \leq s^-\}; \quad i^+ := \min\{i \mid s^+ \leq \tilde{\kappa}_i\}$$

Wenn wir in Abschätzung (2.26)  $2\delta$  addieren, können wir annehmen, dass  $\bar{\zeta}_{j^-} < \tilde{\kappa}_{i^-}$  und  $\tilde{\kappa}_{i^+} < \bar{\zeta}_{j^+}$ , da wir sonst (abhängig von  $\gamma$ ) zwei normale Segmente hinzunehmen können, so dass die Schnittstellen mit diesen die obige Bedingung erfüllen.

Seien  $c^\pm : [0, \infty) \rightarrow S$  Kurvenenden, so dass  $c^\pm(0) = \overline{\mathcal{D}}\gamma(s^\pm)$ ,  $c^\pm$  jedes Segment  $\tilde{N}(t_i)$ ,  $i \geq i^+$  bzw.  $i \leq i^-$  genau einmal schneidet, wobei die Schnittpunkte durch  $\mathcal{D}^0\gamma(\kappa_i)$  gegeben sind, und zwischen  $\mathcal{D}^0\gamma(\kappa_i)$  und  $\mathcal{D}^0\gamma(\kappa_{i+1})$ ,

$i \in \mathbb{Z} \setminus \{i^- - 1, \dots, i^+\}$  ein minimales Segment darstellt. Dann gilt wegen  $L(\tilde{N}(t_i)) = h(t_i)$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^-(c^-, 0) &= \sum_{i \leq i^-} d(\mathcal{D}^0\gamma(\kappa_{i-1}), \mathcal{D}^0\gamma(\kappa_i)) - (t_i - t_{i-1}) \\
 &\quad + d(\mathcal{D}^0\gamma(\kappa_{i^-}), c(0)) - (c(0)_1 - t_{i^-}) \\
 &\stackrel{(2.27)}{\leq} \sum_{i \leq i^-} 2h(t_i) + d_H(\tilde{N}(t_{i^-}), \tilde{N}(t_{i^-+1})) \\
 &\stackrel{(2.26)}{\leq} 6\delta + 3\delta = 9\delta < \varepsilon \\
 \mathcal{L}^+(c^+, 0) &= d(c(0), \mathcal{D}^0\gamma(\kappa_{i^+})) - (t_{i^+} - c(0)_1) \\
 &\quad + \sum_{i \geq i^+} d(\mathcal{D}^0\gamma(\kappa_i), \mathcal{D}^0\gamma(\kappa_{i+1})) - (t_{i+1} - t_i) \\
 &\stackrel{(2.27)}{\leq} d_H(\tilde{N}(t_{i^+-1}), \tilde{N}(t_{i^+})) + \sum_{i \geq i^+} 2h(t_i) \\
 &\stackrel{(2.26)}{\leq} 3\delta + 6\delta = 9\delta < \varepsilon
 \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $\mathcal{L}^\pm(\overline{\mathcal{D}}\gamma, s^\pm) \leq \mathcal{L}^\pm(c^\pm, 0)$  gilt. Da  $\overline{\mathcal{D}}\gamma|_{[\bar{\zeta}_k, \bar{\zeta}_{k+1}]}$  minimale Segmente sind, genügt es zu zeigen, dass die Endpunkte dieser Segmente  $\overline{\mathcal{D}}\gamma(\bar{\zeta}_k)$  auf  $c^+$  bzw.  $c^-$  liegen, falls  $k \geq j^+$  bzw.  $k \leq j^-$ . Sei nun  $k$  fest, so liegt  $\overline{\mathcal{D}}\gamma(\bar{\zeta}_k)$  auf einem Segment  $\tilde{N}(t_{i(k)})$  oder es liegt im Innern einer Menge  $M(t_{i(k)}, t_{i(k)+1})$ . Im ersten Fall folgt die Aussage aus  $\overline{\mathcal{D}}\gamma(\bar{\zeta}_k) = \mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_k) = \mathcal{D}^0\gamma(\kappa_{i(k)}) \in c^\pm$  sofort. Im zweiten Fall ist dies richtig, wenn  $\mathcal{D}^0\gamma|_{[\kappa_{i(k)}, \kappa_{i(k)+1}]}$  bereits ein minimales Segment ist und somit mit dem entsprechenden Segment von  $c^+$  ( $c^-$ ) übereinstimmt. Die nun folgende Rechnung zeigt, dass die nächstgelegene kleinere Knickstelle von  $\mathcal{D}^0\gamma$  außerhalb von  $M(t_{i(k)}, t_{i(k)+1})$  liegt:

$$\begin{aligned}
 d(\mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_k), \mathcal{D}^0\gamma(\zeta_k)) &\geq d(\mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_k), \mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_{k-1})) - d(\mathcal{D}^0\gamma(\zeta_k), \mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_{k-1})) \\
 &\geq d(\mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_k), \mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_{k-1})) - (d(\mathcal{D}^0\gamma(\zeta_k), \mathcal{D}^0\gamma(\xi_k)) \\
 &\quad + d(\mathcal{D}^0\gamma(\xi_k), \mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_{k-1}))) \\
 &\stackrel{Beh. I+II}{\geq} 15\delta - (|\zeta_k - \xi_k| + L(\mathcal{D}^0\gamma|_{[\xi_k, \bar{\xi}_{k-1}]}) \\
 &> 15\delta - (\delta + \frac{h}{2}) > 6\delta > d_H(\tilde{N}(t_{i(k)}), \tilde{N}(t_{i(k)+1}))
 \end{aligned}$$

Analog folgt auch, dass  $\mathcal{D}^0\gamma(\xi_{k+1}) \notin M(t_{i(k)}, t_{i(k)+1})$  gilt. Also erhalten wir aus  $\zeta_k < \kappa_{i(k)} < \kappa_{i(k)+1} < \zeta_{k+1}$  die Behauptung.

Kommen wir nun zu den noch ausstehenden Beweisen:

zu Behauptung I: Da  $\mathcal{D}^0$  und  $\mathcal{D}^{\frac{h}{2}}$   $\mathcal{L}$ -verkürzend sind, gilt für alle  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} \delta > \mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}(\mathcal{D}^0\gamma) &\geq L(\gamma|_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} - d(\gamma(\xi_j), \gamma(\xi_{j+1})) \\ &= h - d(\mathcal{D}^0\gamma(\zeta_j), \mathcal{D}^0\gamma(\zeta_{j+1})) \\ &> 16\delta - d(\mathcal{D}^0\gamma(\zeta_j), \mathcal{D}^0\gamma(\zeta_{j+1})) \end{aligned}$$

Die Aussage folgt analog für  $\overline{\mathcal{D}}\gamma$ .

zu Behauptung II: Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \zeta_j - \xi_j &= \zeta_j - \gamma(\xi_j)_1 + \gamma(\xi_j)_1 - \xi_j \stackrel{(2.10)}{=} \zeta_j - \mathcal{D}^0\gamma(\zeta_j)_1 + \gamma(\xi_j)_1 - \xi_j \\ &= \mathcal{L}^-(\mathcal{D}^0\gamma, \zeta_j) - \mathcal{L}^-(\gamma, \xi_j) \stackrel{2.3.6}{\leq} 0 \end{aligned}$$

und wegen  $\mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}(\mathcal{D}^0\gamma) \leq \mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}\gamma) < \delta$  folgt auch

$$\begin{aligned} \xi_j - \zeta_j &= \mathcal{L}^-(\gamma, \xi_j) - \mathcal{L}^-(\mathcal{D}^0\gamma, \zeta_j) \\ &\stackrel{2.3.6}{\leq} \mathcal{L}^-(\gamma, \xi_j) - \mathcal{L}^-(\mathcal{D}^0\gamma, \zeta_j) + \mathcal{L}^+(\gamma, \xi_j) - \mathcal{L}^+(\mathcal{D}^0\gamma, \zeta_j) \\ &= \mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}(\mathcal{D}^0\gamma) < \delta. \end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung folgt nun analog.

zu Behauptung III: Wegen Behauptung I kann keines der minimalen Segmente  $\mathcal{D}^0\gamma|_{[\zeta_j, \zeta_{j+1}]}$  bzw.  $\overline{\mathcal{D}}\gamma|_{[\overline{\zeta}_j, \overline{\zeta}_{j+1}]}$  vollständig in einem der Segmente  $\tilde{N}(t)$  enthalten sein, denn dann wären sie zu kurz. Aufgrund der Minimalität, lässt sich somit jedes Segment, das in  $E(\delta)$  liegt als Graph darstellen. Es genügt nun zu zeigen, dass die Randpunkte der Segmente monoton in die Enden von  $S$  laufen. Somit reicht es insbesondere, die Aussage für  $\mathcal{D}^0\gamma$  zu zeigen. Wir argumentieren indirekt und nehmen an, dass  $t_1 \in \mathbb{R} \setminus [t^-(\delta), t^+(\delta)]$  und  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$  existieren, so dass  $\mathcal{D}^0\gamma(z_1), \mathcal{D}^0\gamma(z_2) \in \tilde{N}(t_1)$ . Betrachten wir nun die stetige Funktion  $f(s) := \mathcal{D}^0\gamma(s)_1$  auf dem Intervall  $[z_1, z_2]$ , so zeigen die obige Ausführungen, dass die Funktion nicht konstant ist und ihre (lokalen) Extrema nur auf dem Rand und an Knickstellen  $\zeta_i$  annimmt. Wir nehmen an, dass  $\max f > f(z_1) = f(z_2) = t_1$ . Der zweite Fall folgt dann analog. Sei nun  $\zeta_k \in [z_1, z_2]$ , so dass  $f(\zeta_k) = \max f$ .

Behauptung II impliziert wegen  $\overline{\xi}_k = \xi_k + \frac{1}{2}h$  und  $\delta < \frac{h}{2}$ , dass  $\zeta_{k-1} < \overline{\xi}_{k-1} < \zeta_k < \overline{\xi}_k < \zeta_{k+1}$ . gilt. Die Segmente  $\mathcal{D}^0\gamma|_{[\overline{\xi}_{k-1}, \zeta_k]}$  und  $\mathcal{D}^0\gamma|_{[\zeta_k, \overline{\xi}_k]}$  enthalten daher keine Knickstellen und sind insbesondere minimal. Da  $f(\zeta_k) = \max f$  und  $f$  streng monoton auf jedem Segment, folgt weiterhin  $\mathcal{D}^0\gamma(\overline{\xi}_{k-1})_1, \mathcal{D}^0\gamma(\overline{\xi}_k)_1 <$

$\mathcal{D}^0\gamma(\zeta_k)_1$  und wir können berechnen

$$\begin{aligned}
 d(\mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_{k-1}), \mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_k)) &\leq \delta + |\mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_{k-1})_1 - \mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_k)_1| + \delta \\
 &= 2\delta + |L(c_1|_{[\mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_{k-1})_1, \mathcal{D}^0\gamma(\zeta_k)_1]}) - \\
 &\quad L(c_1|_{[\mathcal{D}^0\gamma(\bar{\xi}_k)_1, \mathcal{D}^0\gamma(\zeta_k)_1]})| \\
 &\leq 2\delta + |L(\mathcal{D}^0\gamma|_{[\bar{\xi}_{k-1}, \zeta_k]}) - L(\mathcal{D}^0\gamma|_{[\zeta_k, \bar{\xi}_k]})| + 4\delta \\
 &= 6\delta + |\zeta_k - \bar{\xi}_{k-1} - (\bar{\xi}_k - \zeta_k)| \\
 &= 6\delta + |2\zeta_k - \xi_k + \frac{1}{2}h - \xi_k - \frac{1}{2}h| \\
 &= 6\delta + 2|\zeta_k - \xi_k| \stackrel{Beh.II}{\leq} 8\delta.
 \end{aligned}$$

im Widerspruch zu Behauptung I.  $\square$

BEWEIS (VON SATZ 2.4.1):

Um Satz 2.3.5 anzuwenden, zeigen wir zuerst, dass  $\gamma_n$  eine kompakt gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. Dazu zerlegen wir  $\bar{\mathcal{D}}$  wieder in  $\mathcal{D}^{h/2} \circ \mathcal{D}^0$  und bemerken, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\mathcal{D}^0\gamma_n) = m.$$

Betrachten wir nun mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Lemma 2.4.2 die Folge  $(K_j)_{j \in \mathbb{N}} = ([\xi_{-j}, \xi_j])$  von Kompakta, die  $\mathbb{R}$  ausschöpfen, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n|_{K_j}) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathcal{D}^0(\gamma_n|_{[\zeta_j^n, \xi_j^n]})), \quad j > 0$$

da der Verkürzungsprozess auf jedem einzelnen Segment verkürzend wirkt. Mit Lemma 2.3.7 sehen wir, dass für jedes  $j \in \mathbb{N}$  die Menge  $\{\gamma_n|_{K_j}, n \in \mathbb{N}\}$  in einem Kompaktum  $M_{K_j}(B)$  mit  $B := \sup_n \mathcal{L}(\gamma_n)$  enthalten ist. Nach Proposition 1.3.1 existiert zu jedem  $j \in \mathbb{N}$  eine konvergente Teilfolge von  $(\gamma_n|_{K_j})$ , deren Limes stückweise aus minimalen Segmenten besteht. Wir wählen nun  $\gamma_{n_{(j+1)}}$  als eine Teilfolge von  $\gamma_{n_{(j)}}$ , so dass  $\gamma_{n_{(j+1)}}|_{K_{j+1}}$  konvergiert, wobei  $\gamma_{n_{(1)}} = \gamma_n$  ist. Die Diagonalfolge  $\gamma_{k_{(k)}}$  konvergiert somit auf jedem Kompaktum gleichmäßig gegen eine Kurve die stückweise aus minimalen Segmenten besteht. Wiederholt man das Argument für  $\mathcal{D}^0\gamma_{k_{(k)}}$  und  $\mathcal{D}^{h/2}$ , sieht man, dass eine Teilfolge  $\tilde{\gamma}_k$  existiert, so dass  $\tilde{\gamma}_k$  und  $\bar{\mathcal{D}}\tilde{\gamma}_k$  kompakt gleichmäßig gegen eine Geodätische  $\gamma \in \Omega$  konvergieren. Wir zeigen nun, dass auch gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\tilde{\gamma}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\bar{\mathcal{D}}\tilde{\gamma}_k) = \mathcal{L}(\gamma).$$

Zunächst liegt  $\gamma \in \hat{\Omega}^B$ . Denn aufgrund der Folgendstetigkeit bzgl. kompakt-

gleichmäßiger Konvergenz der Funktionale  $\mathcal{L}(\cdot, s_1, s_2)$  gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\gamma) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma, -s, s) \\
 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\tilde{\gamma}_k, -s, s) \\
 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{L}(\tilde{\gamma}_k) - \mathcal{L}^-(\tilde{\gamma}_k, -s) - \mathcal{L}^+(\tilde{\gamma}_k, s)) \\
 &\stackrel{(2.12)}{\leq} \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{L}(\tilde{\gamma}_k) + \tilde{\gamma}_k(-s)_2 + \tilde{\gamma}_k(s)_2) \\
 &\leq \lim_{s \rightarrow \infty} B + \gamma(-s)_2 + \gamma(-s)_2 = B.
 \end{aligned}$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  gegeben, wähle zu  $\varepsilon/8$  reelle Zahlen  $s^\pm \in \mathbb{R}$  und  $\delta > 0$  wie in Lemma 2.4.2. Nach Voraussetzung existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  so groß, dass für alle  $k \geq N$ :

$$|\mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}\tilde{\gamma}_k) - \mathcal{L}(\tilde{\gamma}_k)| \leq \delta.$$

Aus Lemma 2.4.2 folgt dann auch

$$|\mathcal{L}^\pm(\overline{\mathcal{D}}\tilde{\gamma}_k, s^\pm)| \leq \frac{\varepsilon}{8} \quad (2.29)$$

Außerdem ist auch  $\mathcal{L}(\cdot, s^-, s^+)$  auf  $\widehat{\Omega}^B$  folgenstetig bezüglich kompakt gleichmäßiger Konvergenz. Ist  $N$  ausreichend groß, gilt dann auch

$$|\mathcal{L}(\gamma, s^-, s^+) - \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}\tilde{\gamma}_k, s^-, s^+)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N \quad (2.30)$$

Wir können nun folgern

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}\tilde{\gamma}_k)| &\leq |\mathcal{L}^-(\gamma, s^-) - \mathcal{L}^-(\overline{\mathcal{D}}\tilde{\gamma}_k, s^-)| \\
 &\quad + |\mathcal{L}(\gamma, s^-, s^+) - \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}\tilde{\gamma}_k, s^-, s^+)| \\
 &\quad + |\mathcal{L}^+(\gamma, s^+) - \mathcal{L}^+(\overline{\mathcal{D}}\tilde{\gamma}_k, s^+)| \\
 &\stackrel{(2.29), (2.30)}{\leq} 2\varepsilon/8 + \varepsilon/2 + 2\varepsilon/8 = \varepsilon \quad \forall k \geq N
 \end{aligned}$$

Und mit Satz 2.3.5 folgt nun auch, dass  $\tilde{\gamma}_k$  (bzgl.  $\tilde{d}$ ) gegen  $\gamma$  konvergiert. Da  $\mathcal{L}$  und  $\overline{\mathcal{D}}$  stetig sind, folgt

$$\mathcal{L}(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}(\gamma_n)) = \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}(\gamma)) = m. \quad \square$$

Das nun folgende Lemma und sein Beweis entsprechen (bis auf Bezeichnungen) [Kli78, Lemma A.1.4], welches sich dort auf den klassischen Birkhoff'schen Verkürzungsprozess bezieht. Dies zeigt, dass nun alle für die Anwendung des Minimaxprinzips wichtigen Eigenschaften der neu eingeführten Abbildungen

nachgewiesen sind.

### 2.4.3 Lemma

Sei  $m > 0$  und  $C := \{\gamma \in \widehat{\Omega} \mid \gamma \text{ Geodätische und } \mathcal{L}(\gamma) = m\}$ . So existiert zu jeder offenen Umgebung  $U$  von  $C$ , ein  $\varepsilon = \varepsilon(U) > 0$ , so dass

$$\overline{\mathcal{D}}(\widehat{\Omega}^{m+\varepsilon}) \subset U \cup \widehat{\Omega}^{m-\varepsilon}.$$

BEWEIS:

Da  $\overline{\mathcal{D}}|_C = id$ , existiert eine offene Umgebung  $U' \subset U$  von  $C$ , so dass  $\overline{\mathcal{D}}(U') \subset U$ . Nehmen wir an, dass kein solches  $\varepsilon > 0$  existiert, so finden wir eine Folge  $\gamma_n$  mit  $\gamma_n \notin U'$ , so dass

$$m + \frac{1}{n} > \mathcal{L}(\gamma_n) \geq \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}(\gamma_n)) \geq m - \frac{1}{n}.$$

Mit Satz 2.4.1 folgt nun, dass eine konvergente Teilfolge existiert, deren Limes  $\tilde{\gamma}$  in  $C$  liegt. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu  $\gamma_n \notin U'$ .  $\square$

## 2.5 Minimax-Geodätische

Wie bereits in Abbildung 2.1 deutlich wurde, ist im allgemeinen nicht zu erwarten, dass wir isolierte kritische Punkte finden können, die durch die Minimax-Methode beschrieben werden. Wir führen daher folgende Bezeichnungen ein:

### 2.5.1 Definition

1. (vgl. [Mat86]) Der *Minimaxwert*  $m$  von  $\mathcal{L}$  ist gegeben durch

$$m := \inf_{H \in \mathcal{H}} \max_{\tau \in [0,1]} \mathcal{L}(H(\tau)).$$

2. Eine Geodätische  $c$  heißt *Minimax-Geodätische*, falls  $c$  kein lokales Minimum bezüglich  $\mathcal{L}$  ist und

$$\mathcal{L}(c) = m.$$

3. (vgl. [Hof85]) Eine Geodätische  $c$  heißt *vom Bergpass-Typ* bezüglich  $\mathcal{L}$ , falls  $c$  eine Minimax-Geodätische ist und für alle offenen Umgebungen  $U$  von  $c$  gilt:  $U \cap \widehat{\Omega}^{<m}$  ist nicht wegzusammenhängend.

Wir kommen nun zu unserer Hauptaussage

**2.5.2 Satz** Sei  $m > 0$  der Minimaxwert von  $\mathcal{L}$ , so existiert mindestens eine Minimax-Geodätische in  $\Omega$ .

BEWEIS:

Sei  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Homotopien aus  $\mathcal{H}$ , so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\tau \in [0,1]} \mathcal{L}(H_n(\tau)) = m. \quad (2.31)$$

Wegen Bemerkung 2.2.14 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \widehat{\mathcal{H}}$ . Da der Verkürzungsprozess  $\overline{\mathcal{D}}$  stetig ist, wird durch  $\tau \mapsto \overline{\mathcal{D}}H_n(\tau)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  eine Homotopie definiert. Diese bezeichnen wir auch mit  $\overline{\mathcal{D}}H_n$ .

Nach Definition des Minimaxwertes ist  $\max_{\tau \in [0,1]} \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}H_n(\tau)) \geq m$  und wir können zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $\tau_n := \min\{\tau \in [0, 1] \mid \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}H_n(\tau)) \geq m\}$  bestimmen. Nun folgt

$$m = \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}(H_n(\tau_n))) \leq \mathcal{L}(H_n(\tau_n)) \rightarrow m$$

und, da  $\mathcal{L}$  die Palais-Smale Bedingung 2.4.1 erfüllt, existiert eine Teilfolge von  $(H_n(\tau_n))$ , die gegen eine Geodätische  $c$  mit  $\mathcal{L}(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(H_n(\tau_n)) = m$  konvergiert. Aufgrund der Definition von  $\tau_n$  existiert in jeder Umgebung von  $c$  eine Kurve aus  $\widehat{\Omega}^{< m}$  und somit ist  $c$  eine Minimax-Geodätische.  $\square$

**2.5.3 Bemerkung**

1. Da  $\mathcal{L}$  die Palais-Smale-Bedingung erfüllt, ist für  $\tilde{m} > 0$  die Menge  $C(\tilde{m}) := \{\gamma \in \widehat{\Omega} \mid \mathcal{L}(\gamma) = \tilde{m}, \gamma \text{ ist Geodätische}\}$  kompakt.
2. Ist der Minimaxwert Null, so bedeutet dies bereits, dass durch jeden Punkt des (bmb)-Streifen eine minimale Geodätische läuft, deren Bild vollständig in  $S$  enthalten ist. Denn wählen wir eine Folge aus  $\mathcal{H}$  wie in 2.31. So gilt für alle  $\tau \in [0, 1]$

$$0 \leq \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}}(H_n(\tau))) \leq \mathcal{L}(H_n(\tau)) \rightarrow 0.$$

Nun existiert zu jedem Punkt aus  $S$  eine Folge solcher Kurven, die durch diesen Punkt laufen, und wegen der Palais-Smale-Bedingung konvergiert eine Teilfolge gegen eine Geodätische  $\gamma$  mit  $\mathcal{L}(\gamma) = 0$ . Wie Lemma 2.2.2 zeigt, ist somit  $\gamma$  bereits minimal. Da diese Kurven in  $S$  und somit asymptotisch verlaufen, können wir mit Fakt 1.2.1 auch schließen, dass sie keinen Schnittpunkt besitzen.

Wie [Hof85] für differenzierbare Funktionale zeigt, kann man die geometrischen Eigenschaften von Minimax-Geodätischen unter bestimmten Bedingun-



gen genauer beschreiben. Der nun folgende Satz überträgt sein Ergebnis auf den hier vorgestellten Fall:

**2.5.4 Satz** *Sei  $m > 0$  der Minimaxwert von  $\mathcal{L}$  und  $C = C(m)$  wie in Bemerkung 2.5.3. Falls  $C$  diskret ist oder  $C$  keine lokalen Minima bezüglich  $\mathcal{L}$  enthält, so existiert eine Geodätische vom Bergpass-Typ in  $C$ .*

Wir benötigen für den Beweis folgendes topologische Lemma

**2.5.5 Lemma (vgl. [Hof85])** *Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Seien  $\Gamma$  und  $\Sigma$  nichtleere Teilmengen von  $X$ , so dass  $\Sigma$  kompakt und  $\Sigma \subset \bar{\Gamma}$ . Nehmen wir an es existiert eine offene Überdeckung  $(U_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$  von  $\Sigma$ , so dass  $\sigma \in U_\sigma$  für alle  $\sigma \in \Sigma$  und  $U_\sigma \cap \Gamma$  wegzusammenhängend ist.*

*Wir setzen  $U := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma$ . Dann existiert eine endliche, disjunkte, offene Überdeckung  $(V_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  von  $\Sigma$  in  $X$ , so dass  $V_i \cap \Gamma$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  in einer Wegzusammenhangskomponente von  $U \cap \Gamma$  liegt.*

BEWEIS (VON SATZ 2.5.4):

Nach Satz 2.5.2 ist  $C$  nicht leer. Wir nehmen zunächst an, dass  $C$  keine lokalen Minima enthält und argumentieren wie im Beweis von Hofer indirekt. Es existieren also offene Umgebungen  $U(\gamma)$ ,  $\gamma \in C$ , sodass  $\gamma \in U(\gamma)$  und  $U(\gamma) \cap \hat{\Omega}^{< m}$  wegzusammenhängend. Sei  $U := \bigcup_{\gamma \in C} U(\gamma)$ , so ist  $U$  offen und o.B.d.A  $c_1, c_2 \notin U$ , sonst ersetzen wir  $U(\gamma)$  durch  $U(\gamma) \setminus \{c_1, c_2\}$  für alle  $\gamma \in C$ .

Da  $C$  keine lokalen Minima enthält, ist  $C$  im Abschluss von  $\hat{\Omega}^{< m}$  enthalten. Mit Lemma 2.5.5 finden wir nun endlich viele, paarweise disjunkte, offene Mengen  $V_1, \dots, V_n$ , so dass  $C \subset V := \bigcup_{i=1}^n V_i$  und für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt, dass die Menge  $V_i \cap \hat{\Omega}^{< m}$  in einer Zusammenhangskomponente von  $U \cap \hat{\Omega}^{< m}$  liegt. Sei nun  $\delta := \frac{1}{8} \tilde{d}(\partial U \cup \partial V \cup \{c_1, c_2\}, C)$ , so ist  $W := \{\tilde{\gamma} \in \hat{\Omega} \mid \tilde{d}(\tilde{\gamma}, C) < \delta\}$  eine offene Umgebung von  $C$  mit  $\bar{W} \subset V$ . Hierbei ist zu beachten, dass  $\delta > 0$  ist, da  $C$  kompakt.

Nach Lemma 2.4.3 existiert nun zu  $W$  ein  $0 < \varepsilon < \frac{m}{2}$ , so dass

$$\overline{\mathcal{D}(\hat{\Omega}^{m+\varepsilon})} \subset W \cup \hat{\Omega}^{m-\varepsilon} \quad (2.32)$$

Sei nun  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Minimalfolge aus  $\hat{\mathcal{H}}$ , das heißt eine Folge, so dass (2.31) gilt. So existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\max_{\tau \in [0,1]} \mathcal{L}(H_{n_0}(\tau)) < m + \varepsilon.$$

Für  $H := H_{n_0}$  folgt nun, dass  $\overline{\mathcal{D}(H([0,1]))} \subset W \cup \hat{\Omega}^{m-\varepsilon}$ . Sei

$$M := \{\tau \in [0,1] \mid \overline{\mathcal{D}(H(\tau))} \notin W\}$$

und betrachten wir

$$B := \overline{\mathcal{D}}(H(M)) \cup (U \cap \widehat{\Omega}^{<m}) \subset \widehat{\Omega}^{<m}.$$

Es bleibt nun zu zeigen, dass  $c_1$  und  $c_2$  in derselben Wegzusammenhangskomponente von  $B$  liegen.

Bezeichnen wir dazu die Wegzusammenhangskomponente von  $B$ , die  $c_1$  enthält, mit  $\tilde{B}$  und betrachten

$$\tau_0 := \sup\{\tau \in M \mid \overline{\mathcal{D}}(H(\tau)) \in \tilde{B}\}.$$

Da  $\tilde{d}(c_1, W) > 0$ , ist  $\tau_0 > 0$ . Liegt  $\tau$  im Innern von  $M$ , so existiert ein offenes Intervall  $I$  um  $\tau$ , so dass  $\overline{\mathcal{D}}(H(I)) \notin W$ . Ist nun  $[\tau^-, \tau^+]$  die Zusammenhangskomponente von  $\tau_0$ , so folgt, dass  $\tau_0 = \tau^-$  oder  $\tau_0 = \tau^+$ .

Nehmen wir an, dass  $\tau_0 < 1$ , so folgt  $\overline{\mathcal{D}}(H(\tau_0)) \in \partial W \subset V$ . Wegen (2.32) ist die Länge dieser Kurve kürzer als  $m$ . Außerdem können wir folgern, dass ein  $V_i$  existiert, so dass  $\overline{\mathcal{D}}(H(\tau_0)) \in V_i \cap \widehat{\Omega}^{<m}$ . Wir finden nun ein offenes Intervall  $\tilde{I}$  um  $\tau_0$ , so dass  $\overline{\mathcal{D}}(H(\tilde{I})) \in V_i \cap \widehat{\Omega}^{<m}$ . Also liegt  $\overline{\mathcal{D}}(H(\tau_0))$  selbst in  $\tilde{B}$ . Somit können wir auch den Fall  $\tau_0 = \tau^-$  ausschließen. Falls  $\tau_0 = \tau^+$ , existieren  $\tau > \tau_0$ , so dass  $\overline{\mathcal{D}}(H(\tau)) \in W \cap V_i$ . Betrachten wir

$$\tau_1 := \sup\{\tau \in [0, 1] \mid \overline{\mathcal{D}}(H(\tau)) \in W \cap V_i\},$$

so ist  $\tau_1 \in (\tau_0, 1)$  und es gilt  $\overline{\mathcal{D}}(H(\tau_1)) \in \partial(W \cap V_i) = \partial W \cap V_i$ . Nun folgt erneut mit (2.32), dass auch  $\overline{\mathcal{D}}(H(\tau_1)) \in V_i \cap \widehat{\Omega}^{<m}$ . Somit liegen  $\overline{\mathcal{D}}(H(\tau_0))$  und  $\overline{\mathcal{D}}(H(\tau_1))$  in derselben Zusammenhangskomponente von  $U \cap \widehat{\Omega}^{<m}$ , also ist  $\overline{\mathcal{D}}(H(\tau_1))$  auch in  $\tilde{B}$  enthalten. Wegen  $\tau_1 > \tau_0$  erhalten wir nun einen Widerspruch zur Definition von  $\tau_0$  und es folgt aus  $\tau_0 = 1$  die Behauptung.

Wir führen nun den Fall, in dem  $C$  nur isolierte Punkte enthält, auf den ersten Fall zurück. Zunächst ist die Mächtigkeit von  $C$  aufgrund der Kompaktheit endlich. Betrachten wir nun erneut eine Folge  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $\widehat{\mathcal{H}}$  wie in 2.31 und definieren mit ihr folgende Teilmenge von  $C$ :

$$\tilde{C} := \{\gamma \in C \mid \exists \text{ Teilfolge } H_{n'} \text{ und } \tau_{n'} \in [0, 1] : \gamma = \lim_{n' \rightarrow \infty} H_{n'}(\tau_{n'})\}$$

Wir zeigen zunächst, dass  $\tilde{C}$  keine lokalen Minima enthält.

Nehmen wir an es gäbe ein lokales Minimum  $\gamma \in \tilde{C}$ . Dann ist dieses ein striktes Minimum. Sei  $V$  eine offene Umgebung von  $\gamma$ , so dass  $\mathcal{L}(V \setminus \{\gamma\}) \subset (m, \infty)$ . Da der Verkürzungsprozess stetig und  $\overline{\mathcal{D}}(\gamma) = \gamma$  ist, existiert eine offene Um-

gebung  $V'$  um  $\gamma$ , so dass  $\overline{D}V' \subset V$ . Sei nun  $\delta > 0$  so klein, dass  $\mathcal{B}_\delta^{\tilde{d}}(\gamma) := \{\tilde{\gamma} \in \widehat{\Omega} \mid \tilde{d}(\tilde{\gamma}, \gamma) < \delta\} \subset V'$ , dann ist  $\tilde{m} := \inf\{\mathcal{L}(\tilde{\gamma}) \mid \tilde{\gamma} \in \partial\mathcal{B}_\delta^{\tilde{d}}(\gamma)\} > m$ . Um dies einzusehen, betrachten wir eine Folge  $\gamma_n \in \partial\mathcal{B}_\delta^{\tilde{d}}(\gamma)$ , so dass  $\mathcal{L}(\gamma_n) \rightarrow m'$ . Nach Definition von  $V'$  folgt dann:

$$m \leq \mathcal{L}(\overline{D}(\gamma_n)) \leq \mathcal{L}(\gamma_n) \rightarrow m'.$$

Falls  $m' = m$  folgt mit der Palais-Smale-Bedingung 2.4.1, dass  $\gamma_n$  gegen eine Geodätische  $\tilde{\gamma} \in \partial\mathcal{B}_\delta^{\tilde{d}}(\gamma)$  mit  $\mathcal{L}(\tilde{\gamma}) = m$  konvergiert, im Widerspruch zu  $\mathcal{L}(V \setminus \{\gamma\}) \subset (m, \infty)$ .

Nun folgt schon, dass  $H_{n'}$  für  $n'$  groß genug einen Schnittpunkt mit  $\partial\mathcal{B}_\delta^{\tilde{d}}(\gamma)$  besitzt, so dass  $\lim_{n' \rightarrow \infty} \max_{\tau \in [0,1]} \mathcal{L}(H_{n'}(\tau)) \geq \tilde{m} > m$  im Widerspruch zur Wahl von  $H_n$ . Wie im obigen Beweis sieht man nun, dass  $\tilde{C}$  eine Geodätische vom Bergpass-Typ enthält.  $\square$

### 2.5.6 Bemerkung

Hofer zeigt in [Hof84], dass die Bergpass-Eigenschaft gewährleistet, dass Punkte von diesem Typ Morseindex Eins besitzen. Zunächst kann man diese Aussage auch ohne differenzierbare Struktur formulieren, indem der Morseindex mit Hilfe stückweiser Jacobifelder entlang einer Geodätischen definiert wird (vgl. dazu [Mil63] 15.). Und es ist zu erwarten, dass sie auch in diesem Fall zutrifft. Jedoch beruht der Beweis grundlegend auf dem Morselemma. Da es nicht gelungen ist, das Problem in geeigneter Weise auf einen endlich dimensionale Teilraum zu reduzieren, scheint es hierzu nötig zu sein, eine differenzierbare Struktur auf  $\overline{\Omega}$  analog zur Hilbertmannigfaltigkeit geschlossener Kurven (vgl. [Kli78]) zu definieren.

## 2.6 Minimax-Geodätische auf 2-Tori

Wir betrachten nun Riemannsche Überlagerungen von 2-Tori  $(\mathbb{T}, \overline{g})$ , oder anders ausgedrückt  $\mathbb{R}^2$  versehen mit  $\mathbb{Z}^2$ -periodischen Metriken  $g$ . Es stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen Geodätische auf 2-Tori existieren, deren Lifts Minimax-Geodätische sind. Da die Fundamentalbereiche  $F_{k,l} := [k, k+1] \times [l, l+1]$  kompakt sind, ist die Gaußkrümmung dieser Mannigfaltigkeiten beschränkt. Um zu zeigen, dass es periodische Metriken gibt, so dass beschränkte, minimal berandete Streifen auf  $(\mathbb{R}^2, g)$  existieren, müssen wir also nur zeigen, dass disjunkte minimale Geodätische existieren, die eine Fläche mit beschränkter Oberfläche beranden. Wir fassen dazu zunächst

einige Ergebnisse über minimale Geodätische aus [Ban88, Kapitel 1 und 6] zusammen:

Die Menge der minimalen Geodätischen wird mit  $\mathcal{M}$  bezeichnet. Sie ist invariant unter  $\mathbb{Z}^2$ -Translationen und man kann auf ihr eine stetige, surjektive Abbildung  $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  definieren, die sogenannte Rotationszahl. Diese verallgemeinert den Begriff der Steigung in folgendem Sinne: Zu jeder Geodätischen  $c \in \mathcal{M}$  existiert eine Gerade mit Steigung  $\alpha(c)$ , deren Abstand von  $c$  durch ein positive Konstante beschränkt ist, die nur von der Metrik abhängt. Diese Beschreibung impliziert, dass die Rotationszahl im flachen Fall mit der Geradensteigung übereinstimmt, und je zwei minimale Geodätische unterschiedlicher Rotationszahl einen Schnittpunkt besitzen. Wegen Fakt 1.2.1 besitzen sie dann sogar genau einen Schnittpunkt. Die Eigenschaften der Mengen  $\mathcal{M}_\alpha := \{c \in \mathcal{M} \mid \alpha(c) = \alpha\}$  unterscheiden sich wesentlich, je nachdem ob  $\alpha$  rational oder irrational ist. Bevor wir darauf genauer eingehen, führen wir eine weitere Definition ein:

$$\mathcal{M}_\alpha^{rec} := \{c \in \mathcal{M}_\alpha \mid \exists (k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}, \text{ so dass } c = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{k_n} c\},$$

wobei  $T_k$  für  $k \in \mathbb{Z}^2$  die Translation um  $k$  bezeichnet. Die Kurven aus  $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$  heißen *rekurrent*.

Falls  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , besteht  $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$  aus periodischen Kurven. Diese werden dadurch charakterisiert, dass sie mit einem (und somit mit  $\infty$ -vielen) ihrer  $\mathbb{Z}^2$ -Translate bis auf Parametrisierung übereinstimmen. Sie sind Lifts geschlossener Geodätischer auf  $\mathbb{T}^2$ , die minimale Länge in ihrer freien Homotopieklasse haben. Zwei solche Geodätische schneiden sich nicht, falls sie nicht schon bis auf Parametrisierung übereinstimmen. Weiterhin kann man zeigen, dass die Rotationszahl periodischer minimaler Geodätischer immer rational ist. Wir betrachten im folgenden minimale Geodätische mit Rotationszahl  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Dazu zitieren wir nun die folgenden Theoreme:

**2.6.1 Satz ([Ban88], Theorem 6.9)** *Sei  $\alpha$  irrational. Zwei verschiedene Geodätische aus  $\mathcal{M}_\alpha$  schneiden sich nicht.*

**2.6.2 Satz ([Ban88], Theorem 6.10)** *Sei  $\alpha$  irrational. Entweder existiert durch jeden Punkt in  $\mathbb{R}^2$  ein  $c \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$  ( $c$  ist eindeutig bis auf Parametrisierung) oder  $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$  schneidet jede periodische, minimale Geodätische in einer Cantormenge. Jedes  $c \in \mathcal{M}_\alpha \setminus \mathcal{M}_\alpha^{rec}$  ist in einem Streifen enthalten, der von zwei asymptotischen Geodätischen aus  $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$  berandet wird. Jedes  $c \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$  kann durch periodische, minimale Geodätische approximiert werden.*

**2.6.3 Bemerkung** Die Definition von „asymptotisch“ bei Bangert weicht von unserer Definition ab.

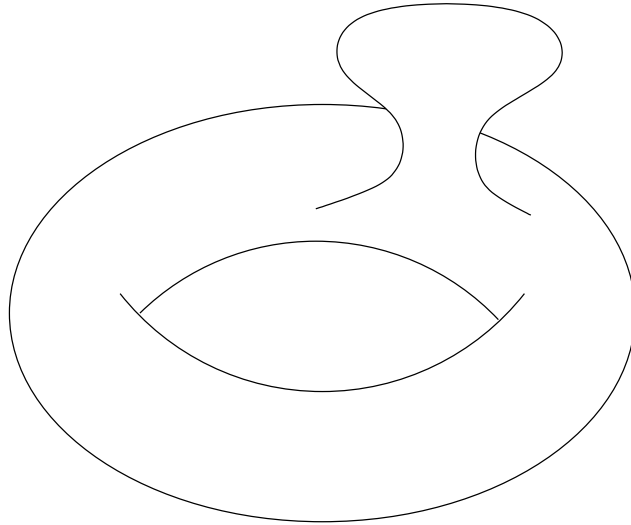


Abbildung 2.6: Torus mit „big-bump“

Zunächst stellt sich die Frage, ob Metriken existieren, für die  $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$  eine Lamination bildet, wie sie im zweiten Fall beschrieben wird. Beispiele dafür liefern Tori mit „big-bump“ (vgl. [Ban88, S.46f]). Hierbei bezeichnet ein „big-bump“ eine geschlossene Kreisscheibe  $B \subset \mathbb{T}$  mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert ein Punkt in  $B$ , dessen Abstand zum Rand von  $B$  größer als  $\frac{1}{4}L(\partial B)$  ist. Wie Bangert zeigt, existieren solche Metriken auf  $\mathbb{T}^2$ . Kurven, die einen „big-bump“ überqueren, sind nicht minimal. Insbesondere trifft hier der erste Fall von Theorem 2.6.2 für kein  $\alpha$  zu.

Nehmen wir nun an, dass  $(\mathbb{R}^2, g)$  und  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , so gewählt wurde, dass die fest gewählte periodische, minimale Geodätische  $\gamma$  in einer Cantormenge geschnitten wird. Das Komplement der Schnittpunkte ist somit offen und zu jeder zusammenhängenden Teilmenge existieren genau zwei minimale Geodätische  $c_1, c_2 \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ , die die Randpunkte definieren. Wir zeigen nun für ein solches von  $c_1$  und  $c_2$  berandete „gap“  $S$  folgendes

**2.6.4 Lemma** Sei  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  die Riemannsche Überlagerung, so ist die Einschränkung  $\pi|_S$  injektiv.

BEWEIS:

Seien  $p$  und  $q$  aus  $S$  gegeben mit  $\pi|_S(p) = \pi|_S(q)$ . Falls  $p$  und  $q$  im selben Fundamentalbereich liegen, folgt sofort  $p = q$ . Desweiteren gilt, dass nicht beide Punkte auf dem Rand liegen können, da sonst entweder eine der beiden minimalen Geodätischen periodisch wäre im Widerspruch zur Irrationalität ihrer Rotationszahl oder  $c_1$  und ein geeignet gewähltes Translat von  $c_2$  einen Schnittpunkt hätten im Widerspruch zu 2.6.1. Sei  $k$  die  $\mathbb{Z}^2$ -Translation, die  $p$  in den Fundamentalbereich von  $q$  abbildet, so bezeichnen wir mit  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$  und  $\tilde{S}$  die Bilder von  $c_1, c_2$  und  $S$  unter  $k$ . Die Kurven  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$  sind rekurrente, disjunkte, minimale Geodätische. Außerdem ist ihre Rotationszahl auch  $\alpha$ : Denn ist  $g_1$  eine Gerade mit Steigung  $\alpha$ , so dass der Abstand von  $c_1$  zu  $g_1$  durch eine Konstante  $l$  beschränkt, so gilt dies auch für  $\tilde{c}_1$  und die um  $k$  verschobene Gerade  $g_1 + k$ .

Da die Überlagerung invariant ist unter  $\mathbb{Z}^2$ -Translationen, gilt  $\pi(p + k) = \pi(p) = \pi(q)$ , und wir können folgern, dass  $p + k = q \in S \cap \tilde{S} \neq \emptyset$ . Nach Satz 2.6.1 schneiden sich die Kurven  $c_1, c_2, \tilde{c}_1$  und  $\tilde{c}_2$  nicht. Dann ist aber eine der Randkurven von  $\tilde{S}$  in  $S$  enthalten oder eine der Randkurven von  $S$  in  $\tilde{S}$ . Im ersten Fall erhalten wir sofort einen Widerspruch zu der Annahme, dass  $S$  keine weiteren minimalen Geodätischen aus  $M_{rec}^\alpha$  enthält. Im zweiten Fall verschieben wir die betrachteten Geodätischen erneut in entgegengesetzter Richtung um den Vektor  $-k$  und erhalten auch dann einen Widerspruch.  $\square$

**2.6.5 Folgerung**  *$S$  ist ein beschränkter, minimal berandeter Streifen.*

BEWEIS:

Es genügt zu zeigen, dass  $F(S) < \infty$ . Wegen Lemma 2.6.4 ist die Einschränkung der Riemannschen Überlagerung  $\pi|_S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \pi(S) \subset \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  eine Isometrie und es folgt

$$F(S) = F(\pi|_S(S)) \leq F(\mathbb{T}^2) < \infty. \quad \square$$

Wir können nun die Definitionen der Kapitel 2.2-2.4 anwenden und erhalten folgenden Satz

**2.6.6 Satz** *Seien  $g$  eine  $\mathbb{Z}^2$ -periodische Riemannsche Metrik auf  $\mathbb{R}^2$  und  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , so dass die Menge  $\mathcal{M}_\alpha$  keine Blätterung des  $\mathbb{R}^2$  darstellen, so existiert eine Minimax-Geodätische auf  $(\mathbb{R}^2, g)$ .*

Wir möchten an dieser Stelle darauf hinweisen, dass Bangert in [Ban88] zeigt, dass ein Variationsproblem  $\Phi$  existiert, das gleichzeitig Aussagen über

minimale Geodätische auf 2-Tori, die Dynamik monotoner Twistabbildungen auf einem Kreisring und dem diskreten Frenkel-Kontorova Modell macht. Die oben zitierten Sätze über minimale Geodätische beruhen zum Teil auf dieser Analogie. Die Existenz von Minimax-Trajektorien in den oben beschriebenen gaps, wurde für die letzten beiden Bereiche bereits betrachtet, vergleiche dazu z.B. Mather [Mat86]. In diesem Fall ist jedoch die Übertragung mit Hilfe von  $\Phi$  nicht möglich: Grob gesagt wird dazu eine minimale Geodätische und all ihre  $\mathbb{Z}^2$ -Translate betrachtet. Diese werden geordnet durchnummeriert. Eine weitere minimale Geodätische kann nun unter der Annahmen, dass sie alle Translate trifft, durch die Schnittpunkte mit diesen eindeutig bestimmt werden. Im Falle der Minimax-Trajektorie wäre jedoch die Zuordnung nicht mehr eindeutig gegeben, da der Injektivitätsradius bei nicht-flachen Tori kleiner als der Durchmesser ist. Insbesondere existiert keine Homotopien, so dass jede Kurve stückweise aus solchen Segmenten zusammengesetzt ist. Die obige Aussage kann somit nicht abgeleitet werden.

### 3 Ausblick

Zum Schluss möchten wir noch auf einige Fragestellungen eingehen, die sich im Zusammenhang mit dieser Arbeit ergeben, jedoch unbeantwortet geblieben sind: Als erstes stellt sich natürlich die Frage, inwiefern die Oberflächenschranke in der Definition der (bmb)-Streifen notwendig für die Existenz Minimax-Geodätischer ist. Eine sinnvolle Verallgemeinerung könnte sein zu fordern, dass der Injektivitätsradius positiv ist und eine unbeschränkte, biinfinite Folge  $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  existiert, so dass für die Randgeodätischen gilt:

$$\liminf_{|i| \rightarrow \infty} d(c_1(t_i), c_2(t_i)) = 0.$$

Betrachten wir jedoch einen festen (bmb)-Streifen und wählen im Innern eine Folge von Bällen, in denen wir die Metrik zu „Big-bumps“ aufblasen, deren Höhe beliebig groß wird. Diese Überlegung lässt vermuten, dass der Minimaxwert im allgemeinen nicht mehr endlich sein muss. Es stellen sich also zwei Fragen: Unter welchen zusätzlichen Bedingungen ist zu erwarten, dass der Minimaxwert trotz  $F(S) = \infty$  endlich bleibt? Und kann man auch im allgemeinen Fall durch eine geeignete Modifikation des Funktionals  $\mathcal{L}$  das Minimax-Prinzip anwenden?

Aber auch unter den gewählten Bedingungen haben wir bereits in Kapitel 2.5 bemerkt, dass das Ergebnis insoweit noch nicht optimal ist, als dass es auf diese Weise nicht gelungen ist, den Morseindex einer Geodätischen vom Bergpass-Typ zu bestimmen. Es wäre daher interessant die Theorie der Hilbertmannigfaltigkeiten auch für diese Kurven zu verallgemeinern.

Zuletzt gehen wir noch einmal auf den Torus ein: Wie in Kapitel 2.6 beschrieben, werden rekurrente minimale Geodätische mit irrationaler Rotationszahl von periodischen minimalen Geodätischen approximiert. Periodische Geodätische können wir auf den Torus projizieren und dann Minimax-Geodätische finden, indem wir Homotopien geschlossener Kurven betrachten. Analog zu [Mat87], [Mat86] stellt sich die Frage, wie die Minimax-Werte sich verhalten, wenn die Randkurven konvergieren. Man kann vermuten, dass sich auch für Geodätische zeigen lässt, dass gewisse Stetigkeitsaussagen für die Minimaxwerte gelten.



## 4 Literaturverzeichnis

- [Ban88] V. Bangert. Mather sets for twist maps and geodesics on tori. In *Dynamics reported, Vol. 1*, volume 1 of *Dynam. Report. Ser. Dynam. Systems Appl.*, pages 1–56. Wiley, Chichester, 1988.
- [Ban93] Victor Bangert. On the existence of closed geodesics on two-spheres. *Internat. J. Math.*, 4(1):1–10, 1993.
- [Bir17] George D. Birkhoff. Dynamical systems with two degrees of freedom. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 18(2):199–300, 1917.
- [Bir66] George D. Birkhoff. *Dynamical systems*. With an addendum by Jurgen Moser. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. IX. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1966.
- [BR98] S. V. Bolotin and P. H. Rabinowitz. Heteroclinic geodesics for a class of manifolds with symmetry. *Regul. Chaotic Dyn.*, 3(4):49–62, 1998. J. Moser at 70 (Russian).
- [BTZ83] W. Ballmann, G. Thorbergsson, and W. Ziller. Existence of closed geodesics on positively curved manifolds. *J. Differential Geom.*, 18(2):221–252, 1983.
- [Cha93] Kung-ching Chang. *Infinite-dimensional Morse theory and multiple solution problems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 6. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.
- [dC76] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.
- [Hed32] Gustav A. Hedlund. Geodesics on a two-dimensional Riemannian manifold with periodic coefficients. *Ann. of Math. (2)*, 33(4):719–739, 1932.

- [Hir76] Morris W. Hirsch. *Differential topology*. Springer-Verlag, New York, 1976. Graduate Texts in Mathematics, No. 33.
- [Hof84] Helmut Hofer. A note on the topological degree at a critical point of mountainpass-type. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 90(2):309–315, 1984.
- [Hof85] Helmut Hofer. A geometric description of the neighbourhood of a critical point given by the mountain-pass theorem. *J. London Math. Soc. (2)*, 31(3):566–570, 1985.
- [Hui98] Gerhard Huisken. A distance comparison principle for evolving curves. *Asian J. Math.*, 2(1):127–133, 1998.
- [Kli78] Wilhelm Klingenberg. *Lectures on closed geodesics*. Springer-Verlag, Berlin, 1978. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 230.
- [Kli95] Wilhelm P. A. Klingenberg. *Riemannian geometry*, volume 1 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, second edition, 1995.
- [Küh99] Wolfgang Kühnel. *Differentialgeometrie*. Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. [Vieweg Studies: Mathematics Course]. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1999. Kurven-Flächen-Mannigfaltigkeiten.
- [Lee03] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [Mat86] John Mather. A criterion for the nonexistence of invariant circles. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (63):153–204, 1986.
- [Mat87] John N. Mather. Modulus of continuity for Peierls’s barrier. In *Periodic solutions of Hamiltonian systems and related topics (Il Ciocco, 1986)*, volume 209 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 177–202. Reidel, Dordrecht, 1987.
- [Mil63] J. Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [Mor24] Harold Marston Morse. A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 26(1):25–60, 1924.

- [Mos03] Jürgen Moser. *Selected chapters in the calculus of variations*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003. Lecture notes by Oliver Knill.
- [Pet98] Peter Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Rab99] Paul H. Rabinowitz. Solutions of a Lagrangian system on  $\mathbf{T}^2$ . *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 96(11):6037–6041 (electronic), 1999.
- [Str96] Michael Struwe. *Variational methods*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1996. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.