

Übungen zur Vorlesung "Diskrete Algebraische Strukturen" im Sommersemester 2010 bei Dr. M. Junker

Blatt 09

28. 06. 2010

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

Definition: Ein gerichteter Graph heißt Turnier, falls für zwei beliebige Ecken $a, b \in E$ gilt, dass entweder $(a, b) \in K$ oder $(b, a) \in K$ gilt.

1. Sei $G = (E, K)$ ein Turnier. Dann gibt es in G einen gerichteten Hamilton-Pfad, also einen Pfad, der alle Ecken abläuft, wobei alle Kanten in der richtigen Richtung durchlaufen werden. Geben Sie dabei einen Algorithmus an, der quadratisch in der Anzahl der Ecken einen gerichteten Hamilton-Pfad findet.

Bemerkung: Es ist einfach, ein Turnier zu finden, in dem es keinen gerichteten Hamilton-Kreis gibt.

2. (2 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie den n -dimensionalen Würfel Q_n als Graphen: Die Ecken sind alle $\{0, 1\}$ -Wörter der Länge n (die Eckenmenge ist also $\{0, 1\}^n$) und zwei Wörter sind benachbart, wenn sie sich an genau einer Stelle unterscheiden.

(a) Wie viele Ecken hat Q_n ? Welchen Grad haben die Ecken?

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Kanten von Q_n . Stellen Sie dafür eine Rekursionsgleichung auf.

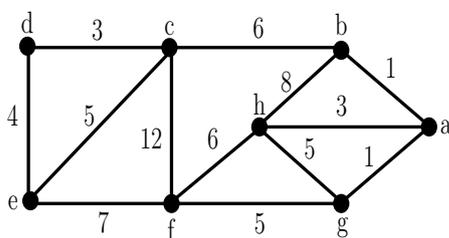
3. (2 Punkte) Zeigen Sie: $K_{3,3}$ ist nicht planar.

Hinweis: Eulersche Formel.

4. (a) Seien $n, q \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für jeden vollständigen (n, q) -Baum $n - 1$ ein Vielfaches von $q - 1$ ist.

(b) Zeichnen Sie alle orientierten vollständigen $(7, 3)$ -Bäume. (Unter „orientiert“ versteht man hierbei, dass die Nachfolger eines Knotens nummeriert sind.)

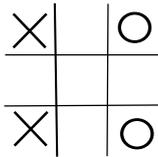
5. Betrachten Sie den folgenden Graphen.



- (a) Finden Sie mit Hilfe des Algorithmus aus der Vorlesung die kürzesten Wege von a zu allen anderen Ecken. Die Kanten bilden nun einen Baum. Geben Sie an in welcher Reihenfolge die Kanten des Baumes gefunden werden.

(b) Finden Sie einen aufspannenden Baum von minimalem Gewicht. Geben Sie auch hier an, wie Sie die Kanten wählen.

6. (2 Zusatzpunkte) Das Spiel Tic Tac Toe ist jedem aus der Schulzeit bekannt. Man spielt es zu zweit auf einem 3×3 Felder großen Spielfeld. Die beiden Spieler machen abwechselnd ihre Zeichen (ein Spieler Kreuze, der andere Kreise). Der Spieler, der Kreuze macht, beginnt. Der Spieler, der als erstes drei seiner Zeichen in eine Reihe, Spalte oder eine der beiden Hauptdiagonalen setzen kann, gewinnt. Wenn allerdings beide Spieler optimal spielen, kann keiner gewinnen, und es kommt zu einem Unentschieden.



Betrachten Sie die angegebene Ausgangsposition. Stellen Sie alle möglichen Spielverläufe (bis auf Isomorphie) als Graph dar, d.h. zeichnen Sie einen Wurzelbaum, dessen Kanten den möglichen Spielzügen entsprechen. Die Knoten stellen dann die Spielsituationen dar. Der Graph soll nur so lange fortgesetzt werden bis ein Spieler gewinnt. Markieren Sie jedes Blatt mit dem Symbol des Siegers.