# Übungen zur Vorlesung "Diskrete Algebraische Strukturen“ im Sommersemester 2010 bei Dr. M. Junker

Blatt 11 05. 07. 2010

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.*

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $i, j = 1, \ldots, n$ seien $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadratische Matrizen. Dann ist das Produkt $A \cdot B = C = (c_{ij})$ für $i, j = 1, \ldots, n$ gegeben durch $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Das $r$-fache Produkt ($r \in \mathbb{N}$) von $A$ mit sich selbst notieren wir mit $A^r = (a_{ij}^{(r)})$, wobei $A^0$ die Einheitsmatrix ist.

   Sei nun $G = (E, K)$ ein Graph mit $n$ Ecken und sei $A$ die zugehörige Adjazenzmatrix, d.h. $a_{ij} = 1$, falls die Ecken $i$ und $j$ miteinander verbunden sind, ansonsten $a_{ij} = 0$. Zeigen Sie, dass $a_{ij}^{(r)}$ die Anzahl der Wege der Länge $r$ von der Ecke $i$ zur Ecke $j$ angibt (Kanten dürfen also auch mehrmals durchlaufen werden!).

2. *(2 Punkte)* Sei $G = (E, K)$ ein gerichteter Graph.

   *Definition:* Eine Quelle ist eine Ecke, zu der keine Kante hinführt. Eine Senke ist eine Ecke, von der keine Kante wegführt.

   Zeigen Sie: Wenn $G$ keinen Kreis enthält, so besitzt $G$ mindestens eine Quelle und mindestens eine Senke.

3. (a) *(2 Punkte)* Zeigen Sie: In jedem Graphen mit mindestens zwei Ecken gibt es zwei, die denselben Grad haben.

   *Hinweis:* Sie können das Schubfachprinzip benutzen.

   (b) *(2 Zusatzpunkte)* Zeigen Sie durch Induktion über die Anzahl der Ecken, dass zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Graph mit $n$ Ecken existiert, so dass keine Ecke Grad 0 hat, genau zwei Ecken Grad $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ haben und jeder weitere mögliche Grad genau einmal auftritt.

4. Folgende Tabelle gibt den Abstand der aufgeführten Städte in km an:

| | Freiburg | Berlin | Rom | Amsterdam | Madrid | Lissabon | London | Stockholm | Prag |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Freiburg | | | | | | | | | |
| Berlin | 637 | | | | | | | | |
| Rom | 769 | 1171 | | | | | | | |
| Amsterdam | 528 | 573 | 1303 | | | | | | |
| Madrid | 1245 | 1867 | 1360 | 1476 | | | | | |
| Lissabon | 1715 | 2317 | 1865 | 1859 | 504 | | | | |
| London | 691 | 929 | 1431 | 354 | 1263 | 1588 | | | |
| Stockholm | 1423 | 1280 | 1974 | 1129 | 2591 | 2994 | 1431 | | |
| Prag | 534 | 721 | 922 | 710 | 1773 | 2247 | 1034 | 1052 | |
| Warschau | 742 | 516 | 1321 | 1091 | 2293 | 2760 | 1445 | 799 | 514 |

   Berechnen Sie mit Hilfe der drei in der Vorlesung vorgestellten heuristischen Algorithmen eine möglichst kurze Weltreise, welche jeweils in Freiburg startet und endet. Geben Sie dabei den benutzten minimalen aufspannenden Baum an und die Paarung (welche man auch durch Ausprobieren finden kann).

5. Sei $m \in \mathbb{N}$. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ definieren wir eine Relation $\sim$ durch:

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y \text{ ist durch } m \text{ teilbar.}$$

Das liefert eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ notieren wir mit $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[x]_m \mid x \in \mathbb{Z}\}$. Von der Addition bzw. der Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ wird nun auf dieser Menge eine Addition $+^\sim$ bzw. eine Multiplikation $\cdot^\sim$ folgendermaßen induziert:

$$\begin{aligned} [x]_m +^\sim [y]_m &= [x+y]_m \\ [x]_m \cdot^\sim [y]_m &= [x \cdot y]_m. \end{aligned}$$

$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +^\sim, \cdot^\sim)$ bildet dann wieder einen Ring. Weisen Sie beispielhaft folgende Eigenschaften nach: Die Operationen sind wohldefiniert. Es gibt ein additives und multiplikatives neutrales Element. Zu jedem Element existiert ein additives inverses Element. Das Distributivgesetz ist erfüllt.

Abgabe: Montag, 12.07.10 vor der Vorlesung