Übungen zur Vorlesung "Diskrete Algebraische Strukturen“ im Sommersemester 2010 bei Dr. M. Junker

Blatt 12 12. 07. 2010

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. (a) Seien $(G, \circ)$, $(H, \circ)$ zwei Gruppen. Desweiteren sei e_G bzw. e_H das neutrale Element in G bzw. H und $\varphi : G \to H$ eine Abbildung.

   Zeigen Sie: Wenn $\varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$ für alle g_1, $g_2 \in G$, dann gilt $\varphi(e_G) = e_H$ und $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$ für alle $g \in G$, d.h. φ ist ein Gruppenhomomorphismus.

   Hinweis: Es kann hilfreich sein, zunächst zu zeigen, dass unter dieser Voraussetzung das Bild von φ eine Untergruppe von H ist.

   (b) Es sei $(\mathbb{R}, +)$ die Gruppe, die aus den reellen Zahlen zusammen mit der Addition als Verknüpfung besteht, und $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot\,)$ die Gruppe die aus der Menge der positiven reellen Zahlen versehen mit der Multiplikation als Verknüpfung besteht. Beweisen oder widerlegen Sie:

   - $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$, $x \mapsto e^x$, ist ein Gruppenhomomorphismus.
   - $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $x \mapsto 17 \cdot x$, ist ein Gruppenhomomorphismus.
   - $g : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $x \mapsto x + 87$, ist ein Gruppenhomomorphismus.

2. (a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 6 161 064 und 4 922 775 und finden Sie zwei ganze Zahlen m, $n \in \mathbb{Z}$, so dass gilt:

$$\mathrm{ggT}(6161064, 4922775) = m \cdot 6161064 + n \cdot 4922775.$$

   (b) Der euklidische Algorithmus gilt nicht nur für den Ring der ganzen Zahlen, sondern für den Ring der Polynome über einem Körper. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ und $x^2 + 7x + 12$ in $\mathbb{Q}[x]$.

3. Sei $\mathcal{D}_4$ bzw. $\mathcal{D}_5$ die Symmetriegruppe der Drehungen und Spiegelungen eines regelmäßigen Vier- bzw. Fünfecks. Bestimmen Sie von jedem Element der beiden Gruppen die Ordnung und zu jeder Gruppe alle Untergruppen (ohne Beweis).

   Hinweis: Die $\mathcal{D}_4$ hat 8 Elemente und 10 Untergruppen und die $\mathcal{D}_5$ hat 10 Elemente und 8 Untergruppen.

4. Betrachten Sie die invertierbaren 2×2-Matrizen

$$Gl_2(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| ad - bc \neq 0; a, b, c, d \in \mathbb{Q} \right\}$$

   mit der üblichen Matrizenmultiplikation „$\cdot$“.

   Zeigen Sie:

   (a) $(Gl_2(\mathbb{Q}), \cdot)$ ist eine Gruppe. (Die Assoziativität müssen Sie nicht zeigen.)

   (b) $(Gl_2(\mathbb{Q}), \cdot)$ ist nicht kommutativ.

5. *(4 Zusatzpunkte)* Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Eulersche φ-Funktion, die gegeben ist durch $\varphi(n) = |\{ a \mid \mathrm{ggT}(a, n) = 1;\ 1 \leq a \leq n\}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

   Hinweis: Betrachten Sie eine Zerlegung von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ nach der jeweiligen Ordnung der Elemente.

6. *(2 Zusatzpunkte)* Offensichtlich kann man die 64 Felder eines Schachbretts so mit 32 Dominosteinen belegen, dass jeder Dominostein ein schwarzes und ein weißes Feld verdeckt.

   Zeigen Sie: Wenn man ein beliebiges schwarzes und ein beliebiges weißes Feld heraussägt, kann man den Rest des Brettes in jedem Fall noch mit 31 Dominosteinen belegen.

   Hinweis: Überlegen Sie sich, dass es einen Kreis gibt, der durch jedes Feld des Schachbretts läuft.

Abgabe: Montag, 19.07.10 vor der Vorlesung