

# Übungen zur Vorlesung "Diskrete Algebraische Strukturen" im Sommersemester 2010 bei Dr. M. Junker

Blatt 02

26. 04. 2010

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.*

1. (a) Zeigen Sie, dass es unter je sieben natürlichen Zahlen mindestens zwei gibt, deren Differenz durch 6 teilbar ist.  
Hinweis: Schubfachprinzip.
- (b) Finden Sie ein Gegenbeispiel dafür, dass es unter je sieben natürlichen Zahlen zwei Zahlen gibt, deren Summe durch 6 teilbar ist.
2. In einer Vorlesung sitzen 35 Studenten und  $n$  Studentinnen. Jeder Student kennt genau 5 Studentinnen aus der Vorlesung, während jede Studentin genau 7 Studenten aus der Vorlesung kennt. Berechnen Sie mittels "doppeltem Abzählen", wie viele Studentinnen in der Vorlesung sitzen. (Beachten Sie, dass die Relation „ $a$  kennt  $b$ “ symmetrisch ist.)
3. Sei  $N$  eine nichtleere  $n$ -Menge,  $R$  eine nichtleere  $r$ -Menge und  $K$  eine  $k$ -Teilmenge von  $R$ .
  - (a) Wie viele Abbildungen und wie viele Injektionen von  $N$  nach  $R$  gibt es, für die kein Element aus  $K$  im Bild enthalten ist?
  - (b) Wie viele Abbildungen und wie viele Injektionen von  $N$  nach  $R$  gibt es, für die das Bild genau aus den Elementen aus  $R \setminus K$  besteht?
  - (c) Wie viele Abbildungen und wie viele Injektionen von  $N$  nach  $R$  besitzen eine genau  $(r - k)$ -elementige Bildmenge?
4. Seien  $M_1, M_2, N_1$  und  $N_2$  endliche Mengen und  $m_1 = |M_1|, m_2 = |M_2|, n_1 = |N_1|, n_2 = |N_2|$ . Seien weiterhin  $M_1$  und  $M_2$  disjunkt.
  - (a) Geben Sie eine Bijektion  $\text{Abb}(M_1, N_1 \times N_2) \xrightarrow{\sim} \text{Abb}(M_1, N_1) \times \text{Abb}(M_1, N_2)$  an.
  - (b) Geben Sie eine Bijektion  $\text{Abb}(M_1 \dot{\cup} M_2, N_1) \xrightarrow{\sim} \text{Abb}(M_1, N_1) \times \text{Abb}(M_2, N_1)$  an.
  - (c) Geben Sie eine Bijektion  $\text{Abb}(M_1 \times M_2, N_1) \xrightarrow{\sim} \text{Abb}(M_2, \text{Abb}(M_1, N_1))$  an.
  - (d) Folgern Sie aus (4a), (4b) und (4c), dass folgende Gleichungen gelten:
    - $(n_1 n_2)^{m_1} = n_1^{m_1} \cdot n_2^{m_1}$
    - $n_1^{m_1 + m_2} = n_1^{m_1} \cdot n_1^{m_2}$
    - $n_1^{m_1 \cdot m_2} = (n_1^{m_1})^{m_2}$

Hinweis: Der Einfachheit halber können Sie annehmen, dass alle betrachteten Mengen nicht leer sind.

Abgabe: Montag, 03.05.10 vor der Vorlesung