Übungen zur Vorlesung "Diskrete Algebraische Strukturen“ im Sommersemester 2010 bei Dr. M. Junker

Blatt 03 03. 05. 2010

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Sei $m, r \in \mathbb{N}$ und $k_1, \ldots, k_r$ natürliche Zahlen, so dass $k_1 + \cdots + k_r = m$. Der Polynomialkoeffizient $\binom{m}{k_1,\ldots,k_r}$ kann kombinatorisch definiert werden als die Anzahl der Möglichkeiten, eine m-Menge in r (paarweise disjunkte, evtl. leere) Teilmengen zu zerlegen, wobei die i-te Teilmenge eine k_i-Teilmenge ist und die Reihenfolge beachtet wird, also die Zerlegungen als verschieden gezählt werden, wenn die gleichen Teilmengen in anderer Reihenfolge auftreten.

   (a) Bestimmen Sie $\binom{4}{1,1,2}$, indem Sie alle Möglichkeiten angeben, die Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ in eine 1-Menge, eine 1-Menge und eine 2-Menge zu zerlegen (Achtung: Reihenfolge der Mengen beachten!).

   (b) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}\binom{m}{k_1,\ldots,k_r} &= \binom{m}{k_1}\binom{m-k_1}{k_2}\binom{m-(k_1+k_2)}{k_3}\cdots\binom{m-(k_1+\cdots+k_{r-1})}{k_r}\\ &= \frac{m!}{k_1!\cdots k_r!}\end{aligned}$$

2. *(Vandermondesche Identität)* Zeigen Sie durch kombinatorische Überlegungen für alle m, $n \in \mathbb{N}$ und $k \leq m + n$:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}.$$

3. Wenn man das Stirlingdreieck zweiter Art mit dem Pascal'schen Dreieck vergleicht, stellt man fest, dass die Stirlingzahlen „meistens“ größer sind.

   Zeigen Sie, dass für $m \geq k \geq 2$ gilt:

$$S_{m,k} \geq \binom{m}{k}.$$

   Hinweis: Sie können die Aussage in folgenden 3 Schritten zeigen:

   Schritt 1: Beweisen Sie $S_{m,2} \geq \binom{m}{2}$ für alle $m \geq 2$ durch Induktion über m.

   Schritt 2: Beweisen Sie $S_{k,k} \geq \binom{k}{k}$ für alle $k \geq 2$.

   Schritt 3: Beweisen Sie nun die obige Aussage durch Induktion über m. Beachten Sie hierbei, dass die Sonderfälle, in denen in der Rekursionformel Terme auftreten, die nicht in der Induktionsvoraussetzung stehen, bereits durch Schritt 1 und 2 behandelt wurden.

4. Sei $m \geq 2$ und B_m die m-te Bellzahl. Zeigen Sie:

$$2^m - m \leq B_m \leq m!$$

Hinweis: Benutzen Sie für die linke Ungleichung Aufgabe 3 und für die rechte Ungleichung eine Induktion nach m unter Verwendung der Rekursionsformel. Sie dürfen ebenfalls die Ungleichung $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e < 3$ verwenden.

Abgabe: Montag, 10.05.10 vor der Vorlesung