Übungen zur Vorlesung "Diskrete Algebraische Strukturen" im Sommersemester 2010 bei Dr. M. Junker

Blatt 05 17. 05. 2010

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. *Fixpunkte von Permutationen.* (6 Punkte)

   (a) Zeigen Sie: Die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen von m Elementen ist

   $$m! \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

   Hinweis: Benutzen Sie die Siebformel.

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Permutation von m Elementen, ($m \geq 1$), fixpunktfrei ist? Was ist der Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit für $m \to \infty$?
   Hinweis: Mathematik I

   (c) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Fixpunkte einer Permutation von m Elementen im Mittel 1 ist.

   Hinweis: Betrachten Sie auf der Menge der Permutationen von m Elementen die Abbildungen $f_1, f_2, \ldots, f_m : S_m \to \{0, 1\}$, die definiert sind durch

   $$f_i(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \text{ Fixpunkt von } \sigma \\ 0, & \text{falls } i \text{ kein Fixpunkt von } \sigma \end{cases}.$$

   Überlegen Sie sich zunächst, dass die Anzahl der Fixpunkte einer Permutation σ durch $\sum_{i=1}^{m} f_i(\sigma)$ gegeben ist.

2. (2 Punkte) Zu einem Fest sind m Personen eingeladen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese m Personen an k (nicht-leere) Tische zu setzen, wobei weder Tische noch Stühle (z.B. durch Nummerierung) unterscheidbar sind, jedoch darauf geachtet wird, wer neben wem sitzt und ob jemand rechts oder links neben einem anderen sitzt?

3. (a) Auf dem Schreibtisch befinden sich k unterscheidbare Briefablagekörbe für den Posteingang. Auf wie viele Arten lassen sich n Briefe auf die Körbe verteilen und darin stapeln?

   (b) Wie viele Möglichkeiten sind es, wenn man annimmt, dass die Körbe ununterscheidbar sind?

   Hinweis: Um 3a zu lösen, halten Sie einen Korb fest und betrachten Sie die anderen $k-1$ Körbe, als wären sie auch Briefe. Führen Sie dann das zweite Problem auf das erste zurück. Beachten Sie hierbei, dass Körbe, die einen Brief enthalten (anhand der Briefe) unterschieden werden können. Achten Sie darauf, dass Körbe auch leer sein können. Darum ist es vielleicht am einfachsten, erst den Spezialfall zu betrachten, dass j der k Körbe nicht leer sind. Anschließend können Sie über j aufsummieren.

4. Der *Typ* einer Permutation von m Elementen ist gegeben durch die endliche Zahlenfolge $b_1, \ldots, b_m \in \{0, \ldots, m\}$, wobei b_i die Anzahl der Zyklen angibt, die aus i Elementen bestehen. Man kann sich leicht überlegen, dass $\sum_{i=0}^{m} b_i \, i = m$ gelten muss.

   (a) Geben Sie alle möglichen Typen an, die eine Permutation von 7 Elementen haben kann. Wie viele Permutationen jeden Typs gibt es?

   (b) Geben Sie an, wie viele Typen von Permutationen von m Elementen, $m \geq 1$, es gibt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe: Montag, 31.05.10 vor der Vorlesung