# Übungen zur Vorlesung "Diskrete Algebraische Strukturen" im Sommersemester 2010 bei Dr. M. Junker

Blatt 06 31. 05. 2010

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.*

1. (a) Zeigen Sie: $F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$.
   Sei dazu $f(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten eine natürliche Zahl $n$ geordnet als Summe von Einsen und Zweien zu schreiben (also z. B. $9 = 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2$).
      i. Zeigen Sie zunächst $f(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$.
      ii. Stellen Sie eine Rekursionsformel für $f(n)$ auf, unterscheiden Sie dabei die beiden Möglichkeiten für den letzten Summanden. Folgern Sie die obige Gleichung. (Hinweis: Beachten Sie die Anfangswerte $f(0) = f(1) = 1$.)

   (b) *(1 Zusatzpunkt):* Überlegen Sie sich, wie man also die Fibonacci-Zahlen im Pascalschen Dreieck wiederfindet.

2. *Binomische Reihe.* Zeigen Sie folgende Identität für formale Potenzreihen:
$$\left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{\frac{1}{m}}{n} X^n \right)^m = (1 + X) \qquad \text{für jede natürliche Zahl } m \geq 1,$$
   wobei $\binom{\frac{1}{m}}{n} = \frac{1}{n!} \cdot \left( \frac{1}{m} (\frac{1}{m} - 1) \cdots (\frac{1}{m} - n + 1) \right)$.

   *Hinweis*: Berechnen Sie induktiv die Potenzen $(\sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{\frac{1}{m}}{n} X^n)^l$ für $2 \leq l \leq m$. Nutzen Sie hierbei (ohne Beweis) die Vandermondesche Identität für $c$, $d \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{j=0}^{k} \binom{c}{j} \binom{d}{k-j} = \binom{c+d}{k}.$$

3. *Leibniz-Regel.* Zeigen Sie folgende Identität für formale Potenzreihen:
$$\left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n \right)' = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \right)' \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n \right)'.$$

4. *Lineare Rekursionsgleichungen.* Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Rekursionsgleichungen an:

   (a)
$$A_{n+2} = 10 A_n + 3 A_{n+1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
   (b)
$$A_{n+3} = 8 A_n - 12 A_{n+1} + 6 A_{n+2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
   Welche Lösung erhält man für die die Anfangswerte $A_0 = 1$, $A_1 = 4$ und $A_2 = 3$?

Abgabe: Montag, 07.06.10 vor der Vorlesung