# Übungen zur Vorlesung "Diskrete Algebraische Strukturen“ im Sommersemester 2010 bei Dr. M. Junker

Blatt 07 07. 06. 2010

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.*

1. Finden Sie für die folgenden Rekursionsgleichungen mit gegebenen Anfangswerten explizite Formeln:

   (a) $a_0 = 5$ und für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$: $a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 2$.

   (b) $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ und für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$: $b_{n+2} = b_n + b_{n+1} + 2$.

   (c) $c_0 = 1$, $c_1 = 2$ und für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$: $c_{n+2} = c_n \cdot c_{n+1}$.

   *Hinweis:* Die Lösungen von 1a und 1b sollten Sie raten und dann per Induktion nachweisen. Die Rekursionsformel in 1c lässt sich durch Logarithmieren auf eine bekannte Formel zurückführen.

2. (a) Zeigen Sie aus der Definition der Catalan-Zahlen (ohne die explizite Formel zu benutzen):

   $$C_{n+1} = \frac{2(2n-1)}{n+1} \cdot C_n, \qquad n \geq 1.$$

   (b) Zeigen Sie per Induktion, dass die explizite Formel $C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ die Rekursionsformel aus Aufgabenteil (2a) mit Anfangswert $C_1 = 1$ erfüllt.

   *Hinweis:* Überlegen Sie sich, auf wie viele Arten Sie einen binären Baum mit $n$ Blättern durch Einfügen einer neuen Verzweigung (entweder an einem Blatt oder in einem Knotenpunkt) zu einem binären Baum mit $n + 1$ Blättern machen können. Verwenden Sie hierbei, dass ein binärer Baum mit $n$ Blättern $n - 1$ Knotenpunkte besitzt.

3. Zeigen Sie für die folgenden auf den natürlichen Zahlen definierten Funktionen:

   (a) $n! \ll n^n$,

   (b) $c^n \ll n!$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

4. Betrachten Sie eine lineare Rekursionsgleichung der Ordnung 3

   $$A_{n+3} = c_0 A_n + c_1 A_{n+1} + c_2 A_{n+2},$$

   dessen charakteristisches Polynom in $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt und eine doppelte Nullstelle besitzt: $x^3 - c_2 x^2 - c_1 x - c_0 = (x - \alpha)^2 (x - \beta)$.

   Zeigen Sie: $a_n = n\alpha^n$ ist eine Lösung der Rekusionsgleichung.

   *Hinweis:* Berechnen Sie mit Polynomdivision $(x^3 - c_2 x^2 - c_1 x - c_0) : (x - \alpha)^2$. Nutzen Sie nun aus, dass $(x^3 - c_2 x^2 - c_1 x - c_0) : (x - \alpha)^2$ ohne Rest teilbar ist, um 2 Gleichungen zu erhalten. Diese werden benötigt, um die obige Aussage zu zeigen.

Abgabe: Montag, 14.06.10 vor der Vorlesung