Übungen zur Vorlesung "Diskrete Algebraische Strukturen" im Sommersemester 2010 bei Dr. M. Junker

Blatt 08 07. 06. 2010

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Bei einem Fußballturnier spielen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Mannschaften nach dem KO-System. Das heißt, ist die Anzahl der Mannschaften ungerade, so wird zunächst eine Mannschaft ausgelost, die auf jeden Fall weiter kommt. Die übrigen Mannschaften spielen dann alle genau einmal und die jeweiligen Gewinner kommen in die nächste Runde, usw. Finden Sie eine Rekursionsgleichung für die Anzahl der Spiele $T(n)$ (unterscheiden Sie hierbei, ob n gerade oder ungerade ist). Geben Sie eine explizite Formel für $T(n)$ an, falls $n = 2^k$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

2. (a) Seien $f, f', g, g' : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ Funktionen, so dass $f \ll g$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|f'(n)| \leq |f(n)|$ und $|g(n)| \leq |g'(n)|$. Zeigen Sie: $f' \ll g'$.

   (b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
   - $n^k \ll a^n$ für $a > 1$,
   - $n^k \ll n^k \log(n) \ll n^{k+1}$.

   Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\log(n) \ll n$ und $n^k \ll n^{k+1}$ gilt.

Definition: Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph.

Zu jeder Ecke a betrachten wir den maximalen Abstand[1] zu einer anderen Ecke b. Das Minimum über alle a nennt man den *Radius* $\mathrm{rad}(G) = \min_{a \in E} \max_{b \in E} d(a, b)$ von G, wobei $\min \emptyset = \infty$. Der *Durchmesser* $\mathrm{diam}(G) = \max_{a \in E} \max_{b \in E} d(a, b)$ von G ist durch den maximalen Abstand zweier Punkte aus G gegeben.

3. Zeichnen Sie alle Graphen mit 4 Ecken (bis auf Isomorphie). Bestimmen Sie für jeden die Anzahl der Zusammenhangskomponenten, den Radius und den Durchmesser.

4. Sei $G = (E, K)$ ein Graph. Zeigen Sie:

   (a) *Dreiecksungleichung:* Für alle $a, b, c \in E$ gilt: $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$,

   (b) $\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}\, G \leq 2\, \mathrm{rad}(G)$.

5. *Zusatzaufgabe:* (2 Punkte) Sei $m \in \mathbb{N}$ und bezeichne B_m die m-te Bell-Zahl. Auf Blatt 3, Aufgabe 4, wurde gezeigt, dass $2^m - m \leq B^m \leq m!$ gilt. Berechnen Sie für $m = 1, 2, \ldots, 20$ die Quotienten $\frac{2^m - m}{B_m}$ und $\frac{B_m}{m!}$. Welches Verhalten für große m scheint Ihnen aufgrund Ihrer Berechnungen am plausibelsten?

   (a) $2^m - m \in o(B_m)$ oder $2^m - m \in \Theta(B_m)$?

   (b) $B_m \in o(m!)$ oder $B_m \in \Theta(m!)$?

Abgabe: Montag, 21.06.10 vor der Vorlesung

[1] vgl. Skript, falls die Definition in der Vorlesung noch nicht angegeben wurde