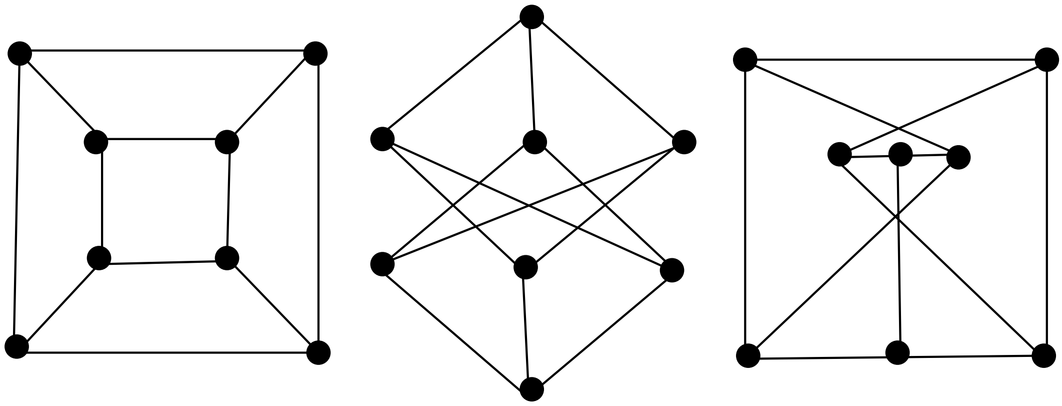
Übungen zur Vorlesung "Diskrete Algebraische Strukturen"
im Sommersemester 2010 bei Dr. M. Junker

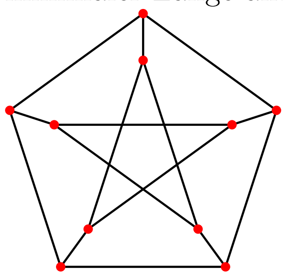
Blatt 09 — 21. 06. 2010

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Welche der drei Graphen sind isomorph? Welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

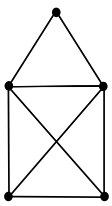


2. (a) Betrachten Sie den Petersen-Graph: Geben Sie den Durchmesser, den Radius, einen Pfad maximaler Länge, einen Kreis maximaler Länge und einen nichttrivialen Kreis minimaler Länge an. Ist der Graph Eulersch? Ist der Graph Hamiltonsch?



Hinweis: Es werden keine Beweise erwartet.

(b) Betrachten Sie den Graph „das Haus vom Nikolaus“. Wie viele Automorphismen dieses Graphen gibt es? Geben Sie alle Automorphismen an. Warum sind die anderen Bijektionen auf der Menge der Ecken keine Automorphismen?



Hinweis: Achten Sie darauf, welche Ecke welchen Grad hat.

3. Sei $G = (E, K)$ ein Graph. Sei $\delta(G) = \min_{e \in E} d(e)$ der minimale Grad einer Ecke von G. Zeigen Sie:

   (a) G enthält einen Pfad von mindestens der Länge $\delta(G)$.

   (b) Falls $\delta(G) \geq 2$ ist, gibt es einen Kreis von mindestens der Länge $\delta(G) + 1$.

Definition: Sei $G = (E, K)$ ein gerichteter Graph.

- Eine Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in E$ von Ecken heißt gerichteter Weg von a_0 nach a_n, falls $(a_i, a_{i+1}) \in K$ für alle $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ gilt.
- Ein gerichteter Eulerzug in einem gerichteten Graphen ist ein gerichteter Weg, in dem alle gerichteten Kanten des Graphen genau einmal vorkommen.
- G heißt schwach zusammenhängend, falls der zugrunde liegende ungerichtete Graph (mit derselben Eckenmenge E und einer Kante zwischen a und b, falls $(a, b) \in K$ oder $(b, a) \in K$) zusammenhängend ist.
- Der Ein-Grad einer Ecke $a \in E$ ist die Anzahl der Kanten, die zu a hinführen. Der Aus-Grad einer Ecke $a \in E$ ist die Anzahl der Kanten, die von a wegführen.

4. Sei $G = (E, K)$ ein schwach zusammenhängender Graph. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

   (a) In G existiert ein geschlossener gerichteter Eulerzug.

   (b) Für jede Ecke von G ist der Ein-Grad gleich dem Aus-Grad.

   Hinweis: Vergleichen Sie den Beweis der analogen Aussage für ungerichtete Eulerzüge.

5. (2 Zusatzpunkte) Wie viele Automorphismen des Petersen-Graphen gibt es? Schreiben Sie dazu ein Programm, das alle Automorphismen bestimmt. Geben Sie die erste Seite der Ausgabe (mindestens 20 Automorphismen) ab.

Abgabe: Montag, 28.06.10 vor der Vorlesung