Definition topologischer und glatter Mannigfaltigkeiten

topologische Mannigfaltigkeit X der Dimension k:
ein topologischer Hausdorffraum, der überall lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^k$ ist

glatter Atlas auf X:
eine offene Überdeckung von X mit lokalen Koordinatensystemen, so dass jeder Koordinatenwechsel glatt ist

differenzierbare Struktur auf X:
ein glatter Atlas auf X, der maximal ist, d.h. der jedes lokale Koordinatensystem enthält, für das alle Koordinatenwechsel mit Atlaskoordinaten glatt sind

→ natürliche Definitionen für Untermannigfaltigkeiten, Diffeomorphismen

Tangentialraum T_pX an glatte Mannigfaltigkeit X in $p \in X$:

- Menge der Äquivalenzklassen $[\gamma]$ von Kurven $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$, $\gamma(0) = p$
  ($\gamma \sim \tilde{\gamma} \iff D\varphi_p([\gamma]) := \frac{d}{dt} \varphi \circ \gamma(t)_{|t=0} = \frac{d}{dt} \varphi \circ \tilde{\gamma}(t)_{|t=0}$ für alle lokalen Koordinatensysteme φ von X nahe p)
- Menge der Derivationen $V : \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p$, $\mathcal{F}_p := \{$lokal nahe p definierte glatte reellw. Fktn.$\}$
  ($V(f \cdot \tilde{f}) = V(f) \cdot \tilde{f}(p) + f(p) \cdot V(\tilde{f}) \quad \forall f, \tilde{f} \in \mathcal{F}_p$)

→ natürliche Definitionen der Vektorraumstruktur von T_pX
und von $Df_p : T_pX \to T_{f(p)}Y$ für glatte $f : X \to Y$