Morsefunktionen

X glatt, $f: X \to \mathbb{R}$ glatt, $p \in X$ ein kritischer Punkt (also $Df_p = 0$)

- p heißt nichtdegenerierter kritischer Punkt
  $:\Leftrightarrow$ die Hessesche von f bzgl. einer (und damit jeder) lokalen Parametrisierung φ von X nahe p ist invertierbar, d.h.
  $\varphi: U \to X$, $U \subset \mathbb{R}^k$, $\varphi(0) = p$ lokale Parametrisierung, $g := f \circ \varphi$
  $$\Rightarrow \det\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right) \neq 0$$
- f heißt Morsefunktion $:\Leftrightarrow$ alle kritischen Punkte von f sind nicht degeneriert

Eigenschaften:
- nicht degenerierte kritische Punkte sind isolierte kritische Pkte
- jede glatte $f: X \to \mathbb{R}$ kann für $X \subset \mathbb{R}^N$ durch Addition von $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \setminus$ Nullmenge zu einer Morsefunktion deformiert werden

Morse-lemma $\Big\{$
- bzgl. geeigneter Koordinaten x_i gilt nahe einem nicht degenerierten kritischen Punkt p: $f(q) = f(p) + \sum_{i,j} h_{ij}\, x_i(q)\, x_j(q)$
  $(h_{ij})_{ij}$ = Hessesche von f in p bzgl. $(x_1, \dots, x_k)$