Mannigfaltigkeiten mit Rand

Definition: analog zu Mannigfaltigkeiten, aber lokale Parametrisierungen durch offene $U \subset H^k = \{(x_1, \dots, x_k) \mid x_k \geq 0\}$

Rand einer glatten Mannigfaltigkeit X mit Rand:

$$\partial X = \left\{ x \in X \;\middle|\; \begin{array}{l} \psi(x) \in \partial H^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x_k = 0\} \\ \text{für ein lokales Koordinatensystem } \psi \end{array} \right\}$$

Inneres: $\mathring{X} = X \setminus \partial X$

Standardkonstruktion

X glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, Y glatte Mannigfaltigkeit,

- $\dim X > \dim Y$, $f: X \to Y$ glatt, $y \in Y$ regulär für f und $f|_{\partial X}$
  $\Rightarrow$ $Z = f^{-1}(y)$ ist glatt mit Rand $\partial Z = Z \cap \partial X$, $\dim Z = \dim X - \dim Y$
- $g: Y \to \mathbb{R}$ glatt, $0 \in \mathbb{R}$ regulär für g
  $\Rightarrow$ $W = \{y \in Y \mid g(y) \geq 0\} \subset Y$ ist glatt mit Rand

Brouwerscher Fixpunktsatz

Für $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ gilt: Jedes stetige $f: B_1(0) \to B_1(0)$ hat einen Fixpunkt.