Übungen zur Vorlesung „Differentialtopologie“ im Wintersemester 2011/12 bei Prof. Dr. K. Wendland

Blatt 01 27. 10. 2011

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. *Abschneidefunktion:*

   (a) Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
   $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases},$$
   ist glatt.

   (b) Zeigen Sie: Für beliebige reelle Zahlen $a < b$ ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x-a)f(b-x)$ glatt, positiv auf dem Intervall (a, b) und verschwindet außerhalb dieses Intervalls.

   (c) Zeigen Sie: Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
   $$h(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} g(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx},$$
   ist glatt und es gilt $h(t) = 0$ für $t \leq a$, $h(t) = 1$ für $t \geq b$ und $0 < h(t) < 1$ für $t \in (a, b)$.

   (d) Konstruieren Sie eine glatte Funktion $k : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, die auf dem Ball mit Radius $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gleich 1 ist und außerhalb des Balls vom Radius b mit $b > a$ verschwindet.

2. *Stereographische Projektion:* Die Stereographische Projektion π ist eine Abbildung von der punktierten Sphäre $S^n \setminus \{Q\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$, auf $\mathbb{R}^n$, wobei aus der Sphäre entweder Nord- oder Südpol ($x_1 = \cdots x_n = 0, x_{n+1} = \pm 1$) entfernt wurden. Sie wird folgendermaßen definiert: Jeder Punkt $p \in S^n \setminus \{Q\}$ wird dem Schnittpunkt der Gerade durch Q und p mit der Hyperebene $\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$ zugeordnet.

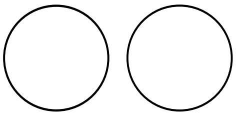
   (a) Geben Sie eine Formel für die Stereographische Projektion an und zeigen Sie, dass Sie einen Diffeomorphismus darstellt.

   (b) Folgern Sie, dass die Sphären S^n, $n \geq 1$, Mannigfaltigkeiten sind.

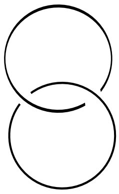
3. (a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist der Paraboloid $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = a^2\}$ eine Mannigfaltigkeit? Begründen Sie kurz. Falls die Menge keine Mannigfaltigkeit ist, reicht eine verbale Begründung.

(b) Welche der folgenden Paare von Mengen sind diffeomorphe Mannigfaltigkeiten? Geben Sie eine kurze verbale Begründung an.

i)

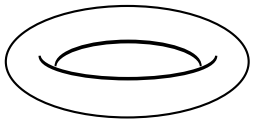


zwei Kreise

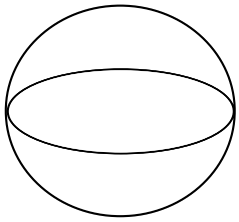


zwei verschlungene Kreise

ii)

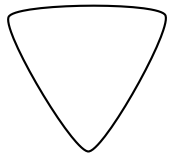


Torus

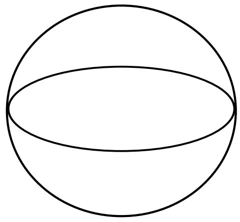


Sphäre

iii)



Rand eines abgerundeten Dreiecks



Sphäre

4. Zeigen Sie, dass jeder Ball $B_r(0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| < r\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $r > 0$, diffeomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist. Nutzen Sie dazu die Abbildung

$$x \mapsto \frac{rx}{\sqrt{r^2 - |x|^2}}.$$

Folgern Sie daraus, dass jeder Punkt einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit eine Umgebung besitzt, die diffeomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Donnerstag, 03. 11., bis 12h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt