Übungen zur Vorlesung „Differentialtopologie“ im Wintersemester 2011/12 bei Prof. Dr. K. Wendland

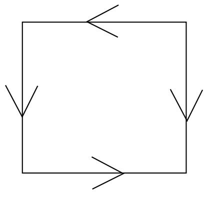
Blatt 10 12. 01. 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. *(3 Punkte)* Welche der folgenden Abbildungen sind orientierungsumkehrend bzw. orientierungserhaltend?
   (a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (e^x\cos(y), e^x\sin(y))$,
   (b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (2xy, 5z, 3xz)$
   (c) *Antipodenabbildung:* $h\colon S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$, für $n \geq 1$,

2. *Gaußabbildung (5 Punkte):*
   (a) *Verallgemeinertes Kreuzprodukt:* Zeigen Sie: Es existiert genau eine multilineare Abbildung
   $$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{(n-1)\text{-mal}} \to \mathbb{R}^n\,, (v_1, \ldots, v_{n-1}) \mapsto v_1 \times \cdots \times v_{n-1},$$
   so dass für alle $v_1, \ldots, v_{n-1}, v \in \mathbb{R}^n$ gilt
   $$\det(v_1, \ldots, v_{n-1}, v) = \big\langle v_1 \times \cdots \times v_{n-1}, v \big\rangle\,.$$
   Zeigen Sie: $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ steht senkrecht auf v_i, $i = 1, \ldots, n-1$, und $v_1 \times \cdots \times v_{n-1} \neq 0$ genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_{n-1}$ linear unabhängig sind.
   (b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine $(m-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie:
   M ist genau dann orientierbar, wenn es eine stetige Abbildung $\nu\colon M \to S^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m$ gibt, so daß $\nu(p)$ Normalenvektor von M ist (d. h. $w \perp \nu(p)$ für alle $w \in T_pM \times \mathbb{R}^m$).

3. *Klein'sche Flasche (3 Punkte):* Sei $K = [0,1]^2/\sim$ das Einheitsquadrat mit folgender Identifizierung $(0,t) \sim (1,t)$ und $(s,0) \sim (1-s,1)$. Auf K lässt sich auf natürliche Weise eine glatte Mannigfaltigkeitsstruktur definieren. (Diese Aussage müssen Sie nicht beweisen!)

   Zeigen Sie: K ist nicht orientierbar.

   Hinweis: Betrachten Sie Kurven in M.

4. *Orientierungsüberlagerung (5 Punkte) :* Sei $m \geq 1$ und M eine zusammenhängende m-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Betrachten Sie $\widehat{M} := \big\{(p,o) \;\big|\; p \in M,\ o \text{ Orientierung von } T_pM\big\}$ und die Projektion $\pi\colon \widehat{M} \to M$ mit $\pi(p,o) := p$. Zeigen Sie:

(a) Es existiert genau eine Topologie und differenzierbare Struktur auf $\widehat{M}$, so dass für jede Karte $\psi : U^\psi \to V^\psi \subseteq \mathbb{R}^m$ von M die Abbildung $\pi|\widehat{U}^\psi$ ein Diffeomorphismus ist, wobei

$$\widehat{U}^\psi := \left\{ (p, o) \mid p \in U^\psi,\ o = \left[\left(\partial_1^\psi, \ldots, \partial_m^\psi\right)\right] \right\} \subseteq \widehat{M}$$

und $\partial_i^\psi = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq m$, falls $\psi(q) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}(q)$ für alle $q \in U^\psi$.

(b) $\widehat{M}$ ist orientierbar.

(c) M ist genau dann nicht orientierbar, wenn $\widehat{M}$ zusammenhängend ist.
Hinweis: Betrachten Sie Kurven in M.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Donnerstag, 19. 01., bis 12h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt