Übungen zur Vorlesung „Differentialtopologie“ im Wintersemester 2011/12 bei Prof. Dr. K. Wendland

Blatt 11 13. 01. 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. (a) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.
   Zeigen Sie: Das Tangentialbündel TM ist orientierbar.

   (b) Seien M und N orientierte Mannigfaltigkeiten.
   Zeigen Sie: Auf $M \times N$ wird durch folgende Festlegung eine Orientierung definiert: Ist $(v_1, \ldots, v_m)$ eine positiv orientierte Basis von TM_p und $(w_1, \ldots, w_n)$ eine positiv orientierte Basis von TN_q, so ist $(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n)$ eine positiv orientierte Basis von $T(M \times N)_{(p,q)}$.

2. *Verschlingungszahl.* Seien M^m und $N^n \subseteq \mathbb{R}^q$ disjunkte kompakte orientierte Untermannigfaltigkeiten mit $m, n \geq 1$ und $m + n = q - 1$ und $M \times N$ bzw. $N \times M$ versehen mit der Orientierung aus Augabe 1(b). Definiere $v\colon M \times N \to S^{q-1} \subseteq \mathbb{R}^q$ durch

   $$v(x,y) := \frac{x - y}{\|x - y\|}\,.$$

   Dann heißt $V(M,N) := \deg(v)$ die *Verschlingungszahl* von M und N.

   (a) Zeigen Sie:
   $V(M,N) = (-1)^{(m+1)(n+1)} V(N,M)$.
   Wenn es eine Homotopie $h\colon [0,1] \times M \to \mathbb{R}^q \setminus N$ gibt mit $h(0,\cdot) = \mathrm{id}_M$ und $h(1,\cdot)$ konstant, dann ist $V(M,N) = 0$.

   (b) Betrachten Sie

   $$M := \Big\{ \big((\cos\varphi)(2 + \cos 3\varphi), (\sin\varphi)(2 + \cos 3\varphi), \sin 3\varphi \big) \;\Big|\; \varphi \in [0, 2\pi] \Big\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

   (das ist das Bild einer Kurve auf dem Torus aus Blatt 06, Aufgabe 3 mit den Radien $R = 2$ und $r = 1$) und

   $$N := \{\, (2\cos\psi, 2\sin\psi, 0) \mid \psi \in [0, 2\pi] \,\} \subseteq \mathbb{R}^3\,.$$

   Wählen Sie je eine Orientierung auf M und N und berechnen Sie $V(M,N)$.

   Hinweis: Betrachten Sie den regulären (!) Wert $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Sei M glatte, orientierbare Mannigfaltigkeit und $\pi : L \to M$ ein glattes Vektorbündel vom Rang 1.

   Zeigen Sie: L ist genau dann orientierbar, wenn $\pi : L \to M$ trivial ist, das heißt $L \cong M \times \mathbb{R}$.

   Hinweis: Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung der Eins einen geeigneten glatten Schnitt $s : M \to L$, das heißt eine Abbildung, für die $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$ gilt.

4. Sei M eine zusammenhängende, glatte Mannigfaltigkeit. M heißt *einfach zusammenhängend*, falls zu je zwei stetigen Wegen $c_1 : [0,1] \to M$ und $c_2 : [0,1] \to M$ mit $c_1(0) = c_2(0)$ und $c_1(1) = c_2(1)$ eine stetige Abbildung $F : [0,1] \times [0,1] \to M$ existiert, so dass $F(\cdot, 0) = c_1(\cdot)$, $F(\cdot, 1) = c_2(\cdot)$, $F(\cdot, 0) = c_1(0)$ und $F(\cdot, 1) = c_1(1)$.

   Zeigen Sie: Ist M einfach zusammenhängend, so ist M orientierbar.

   Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass c_1, c_2 und F glatt sind.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Donnerstag, 19. 01., bis 12h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt