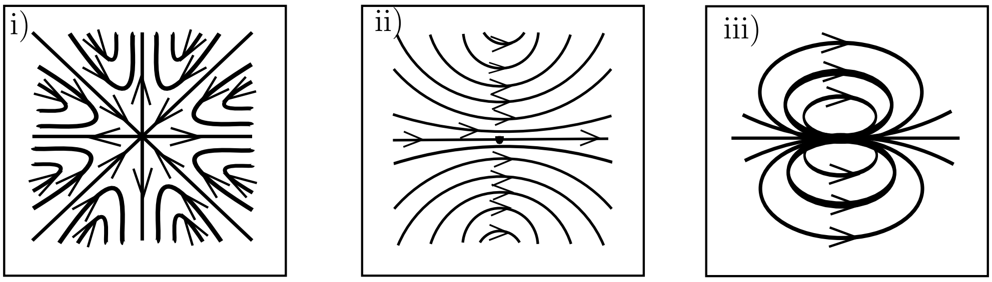
Übungen zur Vorlesung „Differentialtopologie“ im Wintersemester 2011/12 bei Prof. Dr. K. Wendland

Blatt 12 26. 01. 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. *Indexsumme von Vektorfeldern:*

   (a) Folgende Skizzen zeigen das Verhalten der Flusslinien einiger Vektorfelder in der Nähe einer Nullstelle: Bestimmen Sie den Index.

   (b) Betrachten Sie den Torus $\mathbb{T}^2$ aus Aufgabe 3(c) von Blatt 06 und das Vektorfeld

   $$V : \mathbb{T}^2 \to T\mathbb{T}^2,\ V_{\varphi(s,t)} = D\varphi_{(s,t)}(W_{(s,t)}),\ \text{wobei}$$

   $$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (s,t) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos(s))\cos(t) \\ (R + r\cos(s))\sin(t) \\ r\sin(s) \end{pmatrix}$$

   die Parametrisierung von $\mathbb{T}^2$ und

   $$W_{(s,t)} := \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\sin(s)\cos(t) \end{pmatrix}$$

   ein Vektorfeld $W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezeichnet.

   Zeigen Sie, dass V ein Vektorfeld mit nicht degenerierten Nullstellen ist, und bestimmen Sie deren Indexsumme $\sum_{\{p \mid V_p = 0\}} \iota_p(V)$.

2. *Isotopien und Flüsse:* Geben Sie eine Isotopie $F : [0,1] \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ an, die nicht Einschränkung eines Flusses ist, d.h. dass es keinen Fluss $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ gibt, so dass $\Phi\,|_{[0,1]\times\mathbb{T}^2} = F$.

   Bestimmen Sie für $\tau \in [0,1]$ das Vektorfeld $V_\tau \in \Gamma(T\mathbb{T}^2)$, $V_\tau(p) = \frac{\partial}{\partial \tau'} F(\tau', p)\,|_{\tau'=\tau}$.

3. Sei M eine zusammenhängende, glatte Mannigfaltigkeit (ohne Rand), $N \subseteq M$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit mit $\operatorname{codim}(N) \geq 2$ und p, $q \in M \setminus N$.

   Zeigen Sie: Es existiert ein Diffeomorphismus $f : M \to M$, so dass $f\,|_N = \mathrm{id}_N$ und $f(p) = q$.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $M \setminus N$ (weg-)zusammenhängend ist. Überdecken Sie dazu N mit endlich vielen (mit N) kompatiblen Kartengebieten und ändern Sie Wege auf den Kartengebieten geeignet ab.

4. *Abbildungsgrad und Homotopieklassen:* Sei $f : S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2)$ und $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^4$ der Clifford-Torus (vgl. auch Aufgabe 1 Blatt 02).

   (a) Berechnen Sie den Abbildungsgrad von f.

   (b) Berechnen Sie den Abbildungsgrad von $F := f \times f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, -x_2, x_3, -x_4)$.

   (c) Zeigen Sie, dass F nicht homotop zur Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{T}^2}$ ist.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass eine Homotopie zwischen F und $\mathrm{id}_{\mathbb{T}^2}$ eine Homotopie zwischne f und id_{S^1} induziert.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Donnerstag, 02. 02., bis 12h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt