Übungen zur Vorlesung „Differentialtopologie“ im Wintersemester 2011/12 bei Prof. Dr. K. Wendland

Blatt 13 02. 02. 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. (a) Ist $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n (x_i - i)^2 = 3\}$ eine Mannigfaltigkeit? (mit Begründung)
   (b) Ist $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(s,t) = (s+t, s-t, 4st)$ eine Einbettung? (mit Begründung)

2. Sei $f : M \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit.

   Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $v \in \mathbb{R}^n$ der Länge $\|v\| < \varepsilon$ gibt, so dass die Abbildung $F(x) := f(x) + v$ transversal zu N ist.

   Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $(x,y) \mapsto y - f(x)$.

3. Betrachten Sie die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \times S^3 \to S^3$, $(t,x) \mapsto A_t(x)$, wobei

$$A_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t & \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t & \cos t & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t & \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $A_t \in O(3)$ gilt.
   (b) Zeigen Sie, dass φ ein Fluss ist.
   (c) Berechnen Sie das Geschwindigkeitsvektorfeld des Flusses φ.

4. Sei $\Lambda \subseteq \{h : M \to M \mid h \text{ Diffeomorphismus }\}$. Zeigen Sie: die Menge der Λ-invarianten Vektorfelder $\Gamma_\Lambda(TM) := \{V \in \Gamma(TM) \mid Dh \circ X = X \circ h \text{ für alle } h \in \Lambda\}$ ist eine Unter-Lie-Algebra von $\Gamma(TM)$.

   Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst: Ist $h \in \Lambda$ und gilt $Dh(X) = X \circ h$, so folgt für alle $f\colon M \to \mathbb{R}$, dass $X(f \circ h) = X \circ h(f)$ gilt.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Donnerstag, 09. 02., bis 12h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt