Übungen zur Vorlesung „Differentialtopologie“ im Wintersemester 2011/12 bei Prof. Dr. K. Wendland

Blatt 02 03. 11. 2011

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $c : \mathbb{R} \to S^1$, $c(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, ein lokaler Diffeomorphismus ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$, $g(t_1, t_2) = (c(t_1), c(t_2))$, ein lokaler Diffeomorphismus ist.

   (c) Zeigen Sie, dass die Einschränkung $g_{|G}$ der Funktion g auf eine Gerade G eine Immersion ist und dass $g_{|G}$ sogar injektiv ist, falls die Steigung der Geraden irrational ist, d.h. $G = \{(t, \alpha t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt.

2. *Diffeomorphismen: Lokal - Global*

   (a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein lokaler Diffeomorphismus.
   Zeigen Sie, dass das Bild von f ein offenes Intervall ist und dass f einen Diffeomorphismus von $\mathbb{R}$ auf dieses Intervall darstellt.

   (b) Konstruieren Sie einen lokalen Diffeomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der kein Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^2$ auf sein Bild ist.
   Hinweis: Benützen Sie die Abbildung $c : \mathbb{R} \to S^1$ aus Aufgabe 1 (a).

3. *Der Tangentialraum :*

   (a) *Der Tangentialraum als lineare Approximation der Mannigfaltigkeit:* Bestimmen Sie den Tangentialraum T_pS^2 der Sphäre S^2 am Punkt $p = (x, y, z) \in S^2$. Zeigen Sie, dass dann der (affine) Raum $p + T_pS^2$ senkrecht auf dem Vektor steht, der den Mittelpunkt 0 von S^2 mit p verbindet. Skizzieren Sie den Tangentialraum am Nordpol.

   (b) *Tangentialvektoren als Geschwindigkeitsvektoren:* Sei X eine Mannigfaltigkeit und $c : I \subseteq \mathbb{R} \to X$ eine glatte Abbildung, die eine Kurve in X parametrisiert. Der Geschwindigkeitsvektor $\frac{dc}{dt}(t_0)$ der Kurve c zum Zeitpunkt t_0 ist gegeben durch den Vektor $Dc_{t_0}(1) \in T_{x_0}(X)$, wobei $x_0 = c(t_0)$.
   Zeigen Sie, dass jeder Tangentialvektor $v \in T_{x_0}X$ ein Geschwindigkeitsvektor für eine Kurve X ist und umgekehrt.

4. Betrachten Sie die Funktion $f : Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z$.

   (a) Zeigen Sie, dass f glatt ist, und berechnen Sie das Differential von f.

   (b) Ist F ein lokaler Diffeomorphismus, eine Immersion oder eine Submersion?

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Donnerstag, 10. 11., bis 12h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt