Übungen zur Vorlesung „Differentialtopologie“ im Wintersemester 2011/12 bei Prof. Dr. K. Wendland

Blatt 03 10. 11. 2011

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Ist X eine Menge und $\mathcal{B}$ eine Menge von Teilmengen von X, so dass

   (a) $X = \cup_{B \in \mathcal{B}} B$,

   (b) falls $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 \cap B_2$ sind, dann gibt es ein $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3$ und $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

   Weiter seien

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \{U \subseteq X \mid \forall\, p \in U\, \exists\, B \in \mathcal{B} \colon p \in B, B \subseteq U\} \\ \mathcal{T}' &= \{\cup_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}, I \text{ bel. Indexmenge}\} \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass sowohl $\mathcal{T}$ als auch $\mathcal{T}'$ eine Topologie definieren, und dass diese Topologien übereinstimmen.

2. *Die Hausdorff-Eigenschaft:*

   (a) Zeigen Sie: Ist (X, d) ein Euklidischer Raum versehen mit der Euklidischen Topologie, dann ist X Hausdorffsch.

   (b) Zeigen Sie: Ist X ein topologischer Hausdorffraum, dann ist jeder topologische Unterraum von X ebenfalls Hausdorffsch.

   (c) Es sei $X = \mathbb{R} \cup \{i\}$ mit $i \notin \mathbb{R}$, und $\mathcal{T}$ enthalte alle offenen Mengen in $\mathbb{R}$ (mit der Euklidischen Topologie) und zusätzlich alle Mengen der Form $(U \setminus \{0\}) \cup \{i\}$ und $U \cup \{i\}$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}$ eine bzgl. der Euklidischen Topologie offene Umgebung von 0 sei.

   Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis der Topologie ist, der überall lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^1$ ist, jedoch nicht Hausdorffsch ist.

   Bemerkung: Es gilt: $\bigcup_{i \in \emptyset} B_i = \emptyset$.

3. *Immersierte Untermannigfaltigkeiten:* Es sei $X \subseteq S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^4$ das Bild der Funktion $g_{|G}$ aus Aufgabe 1.(c) vom Blatt 02, wobei G eine Gerade mit irrationaler Steigung α sei.

   (a) Zeigen Sie, dass X dicht in $S^1 \times S^1$ liegt.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass Folgen $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ und $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ existieren, so dass $\alpha\, t_n - k_n \to 0$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass $g_{|G} \colon G \longrightarrow \mathbb{R}^4$ keine Einbettung ist.

4. *Die Quotiententopologie und der reelle projektive Raum:*

(a) Seien X ein topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Die (durch f) auf Y induzierte Quotiententopologie $\mathcal{T}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \text{ offen in } X\}.$$

Zeigen Sie: Ist Z ein weiterer topologischer Raum, dann ist eine Abbildung $g : Y \to Z$ genau dann stetig, wenn $g \circ f : X \to Z$ stetig ist.

(b) Der reelle projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ ist der Quotient aus der Sphäre S^n unter der Äquivalenzrelation, die durch $x \sim -x$ gegeben ist. Ein Punkt $p \in \mathbb{RP}^n$ wird dann durch

$$p = [x] = [x_0, \ldots, x_n] = [-x_0, \ldots, -x_n], \quad \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1$$

beschrieben. Bezeichnet $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$, $x \mapsto [x]$, die kanonische Projektion, so wird $\mathbb{RP}^n$ mit der von π induzierten Quotiententopologie versehen.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{RP}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Hinweis: Betrachten Sie folgende Karten (Sie müssen zeigen, dass diese Abbildungen tatsächlich Karten sind.) $\psi_j : U_j = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{RP}^n \mid x_j \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $[x_0, \ldots, x_n] \mapsto (\frac{x_0}{x_j}, \ldots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j})$

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Donnerstag, 17. 11., bis 12h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt