Übungen zur Vorlesung „Differentialtopologie“ im Wintersemester 2011/12 bei Prof. Dr. K. Wendland

Blatt 04 17. 11. 2011

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. *Das Differential:* Seien X und Y glatte Mannigfaltigkeiten, p ein Punkt in X und $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung.
   (a) Zeigen Sie, dass das Differential $Df_p : T_pX \to T_{f(p)}Y$ in Definition 1.3.13 wohldefiniert ist.
   (b) Zeigen Sie, dass durch $\overline{D}f_p : T_pX \to T_{f(p)}Y$, $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ eine (wohldefinierte!) Abbildung gegeben ist, die mit Df_p übereinstimmt.

2. *Submersionen:* Seien X und Y glatte Mannigfaltigkeiten.
   (a) Zeigen Sie: Ist $f : X \to Y$ eine Submersion und $U \subseteq X$ eine offenen Teilmenge, so ist $f(U)$ offen in Y.
   (b) Sei X eine kompakte Mannigfaltigkeit und Y eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, d.h. dass Y nicht durch zwei offene, disjunkte, nichtleere Teilmengen überdeckt werden kann. Zeigen Sie: Jede Submersion $f : X \to Y$ ist surjektiv. Folgern Sie daraus, dass keine Submersion von einer kompakten Mannigfaltigkeit nach $\mathbb{R}^k$ existiert.

3. *Die orthogonalen Matrizen als Mannigfaltigkeit*
   Sei $O(n) := \{A \in GL(n) \mid A^T \cdot A = E_n\}$
   (a) Zeigen Sie, dass $O(n)$ kompakt ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $O(n)$ eine Mannigfaltigkeit ist und berechnen Sie die Dimension von $O(n)$.
   Hinweis: Zeigen Sie: E_n ist regulärer Wert der Abbildung
   $$f : M_n(\mathbb{R}) = \{n \times n - \text{Matrizen}\} \to \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}, \quad A \mapsto A^T \cdot A.$$
   (c) Bestimmen Sie $T_{E_n}O(n)$.

4. (a) Ist V ein (endlich-dimensionaler) Vektorraum und $\Delta := \{(v, v) \mid v \in V\}$ die Diagonale und $L : V \to V$ eine lineare Abbildung.
   Zeigen Sie: Der Graph $\{(v, L(v)) \mid v \in V\}$ ist genau dann transversal zu Δ, wenn $+1$ kein Eigenwert von L ist.
   (b) Ist X kompakte, glatte Mannigfaltigkeit und $f : X \to X$ eine glatte Abbildung, für die gilt: Ist $x \in X$ Fixpunkt von f, so ist $+1$ kein Eigenwert des Differentials $Df_x : T_xX \to T_xX$.
   Zeigen Sie: f besitzt höchstens endlich viele Fixpunkte.
   Hinweis: Fassen Sie jeden der endlich-dimensionalen Vektorräume als eine Mannigfaltigkeit mit der üblichen, glatten Struktur auf.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Donnerstag, 24. 11., bis 12h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt