Übungen zur Vorlesung „Differentialtopologie“ im Wintersemester 2011/12 bei Prof. Dr. K. Wendland

Blatt 05 24. 11. 2011

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. *(3 Punkte)* Welche der folgenden Mannigfaltigkeiten schneiden sich transversal?
   (a) $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathbb{R}^l$ in $\mathbb{R}^n$ (abh. von k, l und n).
   (b) Die symmetrischen Matrizen $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$ und die antisymmetrischen Matrizen $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$ in $M_n(\mathbb{R})$.
   (c) Die x-Achse und $\{(x, x^3) \mid x \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^2$.

2. *(4 Punkte)* Betrachten Sie $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $f(x_0, \ldots, x_n) = -x_0^2 + \sum_{k=1}^n x_k^2$.
   (a) Zeigen Sie, dass $H^n(r) := f^{-1}(r)$ für alle $r \neq 0$ eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.
   (b) Schneiden sich $H^n(r)$ und $S^n(\rho) = \{(x_0, \ldots, x_n) \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = \rho\}$ für $r \neq 0$ und $\rho \neq 0$ transversal in $\mathbb{R}^{n+1}$? (Die Antwort hängt von r und ρ ab.)

3. *(2 Punkte)* Zeigen Sie: Sind X und Z transversale, glatte Untermannigfaltigkeiten in Y, so gilt für alle $y \in X \cap Z$:
$$T_y(X \cap Z) = T_y(X) \cap T_y(Z).$$

4. *(3 Punkte)* Sind M, N, L glatte Mannigfaltigkeiten, $f : M \to N$ und $g : L \to N$ glatte Abbildungen, so dass für alle $p \in M$ und $q \in L$ mit $f(p) = g(q) = r \in N$ gilt:
$$Df_p(T_pM) + Dg_q(T_qL) = T_r(N).$$
   Zeigen Sie, dass die Menge $\{(p, q) \in M \times L \mid f(p) = g(q)\}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit ist und bestimmen Sie ihre Dimension als Mannigfaltigkeit.

5. *(4 Punkte)*
   (a) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^N$ eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und $p \in X$ ein Punkt. Sei $(W_p \,/ \sim)$ wie in Def. 1.3.5 und T_pX wie in Def. 1.3.
   Zeigen Sie: Die Abbildung $L : (W_p \,/ \sim) \to T_pX \subseteq \mathbb{R}^N$, $[\gamma] \mapsto \dot{\gamma}(0)$ ist ein (wohldefinierter) Isomorphismus.
   (b) Sei $Y \subseteq \mathbb{R}^4$ das Bild der Abbildung g aus Aufgabe 1(b) von Blatt 02. Und seien $\gamma_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to Y$, $\gamma_1(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 1, 0)$ und $\gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to Y$, $\gamma_2(s) = (1, 0, \cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$.
   Bestimmen Sie zunächst unter Benutzung der Bijektion aus Satz 1.3.6 die Summe $[\gamma_1] + [\gamma_2] =: [\tilde{\gamma}]$. Berechnen Sie dann die Vektoren $\dot{\tilde{\gamma}}(0)$, $\dot{\gamma_1}(0)$ und $\dot{\gamma_2}(0) \in \mathbb{R}^4$.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Donnerstag, 01. 12., bis 12h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt