Übungen zur Vorlesung „Differentialtopologie“ im Wintersemester 2011/12 bei Prof. Dr. K. Wendland

Blatt 06 | 01. 12. 2011

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. *(4 Punkte)* Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und $Z \subseteq X$ eine Untermannigfaltigkeit, so dass $\dim(Z) < \dim(X)$. Zeigen Sie, dass Z eine Nullmenge in X ist.

2. *(3 Punkte)* Ist X eine glatte k-dimensionale Mannigfaltigkeit, $f : X \to \mathbb{R}$ eine Morsefunktion und p ein nichtdegenerierter kritischer Punkt von f. Folgern Sie aus dem Morselemma (Thm. 2.3.14.), dass eine Karte $\psi : U \to \mathbb{R}^k$ um p existiert, so dass
$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i^2(y), \qquad \varepsilon_i \in \{\pm 1\},$$
gilt, wobei $\psi(q) =: \begin{pmatrix} x_1(q) \\ x_2(q) \\ \vdots \\ x_k(q) \end{pmatrix}$. Überlegen Sie sich, dass auch der Index $\#\{i \mid \varepsilon_i = -1\}$ unabhängig von der Karte ψ ist.

3. *(6 Punkte)*
   (a) Sei $S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ und $f : S^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \to x_{n+1}$ die Höhenfunktion. Zeigen Sie: f ist eine Morsefunktion.
   (b) Zeigen Sie, dass es zu jeder glatten Untermannigfaltigkeit $X \subseteq \mathbb{R}^N$ eine lineare Funktion $l\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ gibt, deren Einschränkung auf X eine Morsefunktion ist.
   (c) Betrachten Sie den Torus
$$\mathbb{T}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} (R + r\cos(s))\cos(t) \\ (R + r\cos(s))\sin(t) \\ r\sin(s) \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3. \qquad \text{für } 0 < r < R$$
   Zeigen Sie, dass $l : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \to x_1$ eingeschränkt auf $\mathbb{T}^2$ eine Morsefunktion ist. Ist die Einschränkung der Höhenfunktion $(x_1, x_2, x_3) \to x_3$ eine Morsefunktion? Skizzieren Sie den Torus und zeichnen Sie für beide Abbildungen die Menge der kritischen Punkte ein.

4. *(3 Punkte)*
   (a) Zeigen Sie, dass $B_1^3 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ist.
   (b) Zeigen Sie, dass das Urbild $f^{-1}(0)$ der Funktion $f : B_1^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 5xz - 2z + 3x + 2y^2$ eine glatte Untermannigfaltigkeit mit Rand in B_1^3 ist.
   Hinweis: Zeigen Sie erst, dass für $p \in S^2$ gilt: $Df_{p|T_pS^2} = D(f_{|S^2})_p$.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Donnerstag, 08. 12., bis 12h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt