Übungen zur Vorlesung „Differentialtopologie“ im Wintersemester 2011/12 bei Prof. Dr. K. Wendland

Blatt 07 08. 12. 2011

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. *(2 Punkte)* Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂X.

   Zeigen Sie: ∂X ist eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim X - 1$.

2. *Frobenius' Theorem (2 Punkte):* Zeigen Sie: Ist A eine $n \times n$-Matrix mit ausschließlich nichtnegativen Einträgen, so besitzt A einen nichtnegativen Eigenwert.

   Hinweis: Unterscheiden Sie zunächst die Fälle A nichtinvertierbar und invertierbar. Im zweiten Fall betrachten Sie auf der Sphäre die Abbildung $v \mapsto \frac{Av}{|Av|}$. Zeigen Sie, dass diese Abbildung den ersten Quadranten $\{x \in S^{n-1} \mid x_i \geq 0 \text{ für alle } i\} (\cong B_1^{n-1}(0)!)$ invariant lässt und wenden Sie den Brouwerschen Fixpunktsatz an.

3. *(4 Punkte)* Sei X glatte Mannigfaltigkeit mit Rand.

   (a) Zeigen Sie: Zu jedem Punkt $p \in \partial X$ existiert eine offene Umgebung U von p in X und eine glatte Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, die genau die Randpunkte $q \in U \cap \partial X$ auf 0 abbildet und so dass 0 ein regulärer Wert von f ist.

   (b) Zeigen Sie: Es existiert eine glatte, nichtnegative Funktion $g : X \to \mathbb{R}$, die 0 als regulären Wert besitzt und so dass $\partial X = g^{-1}(0)$.
   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabenteil (a) und eine Zerlegung der Eins.

4. *(4 Punkte)* Betrachten Sie auf S^2 die Polarkoordinaten

   $$F : (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3, \quad (\theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

   und die Koordinaten, die durch die Karte

   $$\psi : \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_3 > 0\} \to B_1^2(0) \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$$

   gegeben ist.

   (a) Bestimmen Sie die Tangentialvektoren ∂_1, ∂_2 bezüglich der Polarkoordinaten und $\widetilde{\partial}_1, \widetilde{\partial}_2$ bezüglich der Koordinaten ψ an jedem Punkt aus dem jeweiligen Definitionsbereich.

   (b) Betrachten Sie den Punkt $p = F(\frac{\pi}{4}, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\frac{1}{\sqrt{2}}) \in S^2$. Die Koordinaten auf dem Vektorraum T_pS^2 bezüglich der Basen ∂_1, ∂_2 und $\widetilde{\partial}_1, \widetilde{\partial}_2$ seien mit (v_1, v_2) beziehungsweise $(\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2)$ bezeichnet. Berechnen Sie den durch den Koordinatenwechsel $\psi \circ F$ auf T_pS^2 induzierten Koordinatenwechsel $(v_1, v_2) \mapsto (\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2)$, und zeigen Sie, dass es sich um einen linearen Isomorphismus handelt.

5. *Glatte Version des Satzes von Urysohn (4 Punkte):* Sind A und B disjunkte, abgeschlossene Teilmengen einer Mannigfaltigkeit X.

   Zeigen Sie: Es existiert eine glatte Funktion auf $f : X \to [0,1]$, so dass $f_{|A} = 0$ und $f_{|B} = 1$.

   Hinweis: Zerlegung der Eins.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Donnerstag, 15. 12., bis 12h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt