Übungen zur Vorlesung „Differentialtopologie“ im Wintersemester 2011/12 bei Prof. Dr. K. Wendland

Blatt 08 15. 12. 2011

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. *(3 Punkte):* Geben Sie für folgende Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$ die Flusslinien an:

   (a) $x_1\partial_1 + 2x_1\partial_2$ (b) $\partial_1 + \sin(x_1)\partial_2$,

   wobei ∂_1, ∂_2 die Koordinatenvektoren bezüglich der Standardkoordinaten bezeichnet.

2. *(3 Punkte):* Sei V ein beschränktes, glattes Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$.

   Zeigen Sie: Jede Integralkurve von V ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

   Hinweis: Verwenden Sie den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen (vgl. z.B. Gewöhnliche Differentialgleichungen, W. Walter, Springer Verlag, 1972, S. 64).

3. *(3 Punkte):* Sei $V(x) = \partial_1$ Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$. Sei $\varphi_N : S^2 \setminus N \to \mathbb{R}^2$ die Stereographische Projektion vom Norpol.

   Berechnen Sie $(\varphi_N^{-1})_* V$.

   Ist $(\varphi_N^{-1})_* V$ zu einem glatten Vektorfeld auf der ganzen S^2 fortsetzbar?

4. *Das Normalenbündel (4 Punkte):* Sei $X \subseteq \mathbb{R}^N$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $k < N$. Zu $x \in X$ bezeichnet

   $$N_xX = \{v \in T_x\mathbb{R}^N \mid v \text{ steht bzgl. des Eukl. Skalarprodukts senkrecht auf } T_xX\}.$$

   Das Normalenbündel von X ist definiert durch

   $$NX = \amalg_{x\in X} N_xX.$$

   Zeigen Sie: Das Normalenbündel ist ein Vektorbündel von Rang $(N-k)$, d.h. NX trägt auf natürliche Weise die Struktur einer Mannigfaltigkeit der Dimension N, die Projektion $\pi : NX \to X$ ist glatt und surjektiv und es gilt:

   (a) für alle $x \in X$ ist $N_xX = \pi^{-1}(x)$ mit einer $(N-k)$-dimensionalen Vektorraumstruktur versehen.

   (b) zu jedem $x \in X$ existiert eine Umgebung U und ein Homöomorphismus $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

   $$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

   wobei π_1 die Projektion auf die erste Komponente bezeichnet; und so dass für jeden Punkt $x \in X$ die Einschränkung $\psi_{|N_xX} : N_xX \to \{x\} \times \mathbb{R}^k$ ein Vektorraumisomorphismus ist.

Hinweis: Wenden Sie zunächst das Gram-Schmidtsche-Orthonormalisierungsverfahren auf die Koordinatenvektoren geeigneter Karten an, um lokal geeignete Vektorfelder zu erhalten, die an jedem Punkt den Normalenraum aufspannen.

5. *(3 Punkte):*

   (a) Sei $f : \mathbb{R}^N \to Y$ eine glatte Abbildung und y ein regulärer Wert von f.

   Zeigen Sie: Das Normalenbündel der Untermannigfaltigkeit $X := f^{-1}(y) \subseteq \mathbb{R}^N$ ist trivial, das heißt, es existieren Vektorfelder $V_i : X \to \mathbb{R}^N$, $1 \leq i \leq l := \dim(Y)$, so dass an jedem Punkt $x \in X$ der Normalenraum N_xX von $\{V_1(x), V_2(x), \ldots, V_l(x)\}$ aufgespannt wird (m.a.W.: $TX \cong X \times \mathbb{R}^l$, $l = \dim(Y)$).

   Bemerkung: Später werden wir leicht zeigen können, dass es Untermannigfaltigkeiten gibt, deren Normalenbündel nicht trivial ist. Diese sind also Beispiele für Untermannigfaltigkeiten, die nicht global als Urbild eines regulären Werts darstellbar sind.

   (b) Betrachte $E = ([0,1] \times \mathbb{R}^1)/(1,v) \sim (0,-v)$ das (offene) Möbiusband und $\pi : E \to S^1 = [0,1]/\{0,1\}$ die Projektion auf die erste Komponente.

   Zeigen Sie: $\pi : E \to S^1$ ist ein nicht triviales Vektorbündel, d.h. es existiert keine glatte Abbildung $V : S^1 \to E$, $V(t) = [t, v(t)] \in E$, mit $v(t) \neq 0$ für alle $t \in S^1$.

   Hinweis: Sie dürfen voraussetzen, dass $\pi : E \to S^1$ ein glattes Vektorbündel ist.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Donnerstag, 22. 12., bis 12h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt