# Übungen zur Vorlesung „Differentialtopologie“ im Wintersemester 2011/12 bei Prof. Dr. K. Wendland

Blatt 09 22. 12. 2011

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.*

1. Sei $X$ eine $k$-dimensionale, glatte Mannigfaltigkeit und $V : X \to TX$ ein glattes Vektorfeld auf $X$. Sei weiterhin $p \in X$ ein Punkt, so dass $V(p) \neq 0$.

   Zeigen Sie:

   (a) Es existiert eine Umgebung $U$ um $p$ und eine Untermannigfaltigkeit $S$ der Kodimension 1 in $U$, so dass $p \in S$ und $V$ an keinem Punkt im Tangentialraum von $S$ liegt.

   Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Karte um $p$.

   (b) Es existiert eine Karte $\psi \colon U \to U'$ um $p$, so dass $V|_U = \partial_1$.

   Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $(t, x_2, \ldots, x_k) \mapsto \Phi_t(\varphi^{-1}(0, x_2, \ldots, x_k))$, wobei $\varphi$ eine Karte von $X$, die verträglich mit $S$ ist, und $\Phi$ den lokalen Fluss mit Geschwindigkeitsvektorfeld $V$ bezeichnet.

2. Auf $\mathbb{R}^4$ ist eine Multiplikation erklärt, die $\mathbb{R}^4$ zu einem Schiefkörper macht, dem Schiefkörper der *Quaternionen* (vgl. Ebbinghaus et al., Zahlen, Springer-Verlag, Kapitel 7). Diese Multiplikation ist gegeben durch die $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung von $e_1 \cdot e_i = e_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$, $e_i \cdot e_i = -e_1$ für $i = 2, 3, 4$, $e_2 \cdot e_3 = -e_3 \cdot e_2 = e_4$, $e_3 \cdot e_4 = -e_4 \cdot e_3 = e_2$ und $e_4 \cdot e_2 = -e_2 \cdot e_4 = e_3$. Es ist leicht zu zeigen, dass $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ versehen mit dieser Multiplikation eine *Liegruppe* bildet, d.h eine Gruppe versehen mit der Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit bezüglich der die Gruppenoperationen glatt sind.

   (a) Für einen Tangetialvektor $w = [\gamma] \in T_{e_1} S^3$ wird durch $V^w(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} x \cdot \gamma(t)$ ein glattes Vektorfeld $V^w \colon S^3 \to TS^3$ definiert.

   Zeigen Sie: Für $x \in S^3$ beliebig, ist die Abbildung $T_{e_1} S^3 \to T_x S^3$, $w \mapsto V^w(x)$ ein Isomorphismus.

   Folgern Sie daraus, dass $TS^3$ ein triviales Vektorbündel ist (vgl. Aufgabe 5, Blatt 08).

   (b) Berechnen Sie $V^{e_2}$, $V^{e_3}$, $V^{e_4}$.

3. $\mathbb{R}^3$ mit dem Kreuzprodukt ist eine Liealgebra.

4. Berechnen Sie die Lieklammern $[X, Y]$ und $[X, Z]$ folgender Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$:

   $X = x_1 \partial_1 + \sin(x_1)\partial_2, \quad Y = x_2^3 \partial_1 - \cos(x_2)\partial_2, \quad Z = \sin(x_2)\partial_1 + x_2 \partial_2.$

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Donnerstag, 12. 01., bis 12h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt*