

Bewertete Körper

Blatt 5

Abgabe: 26.11.2018

Aufgabe 1 (10 Punkte).

Sei R ein Bewertungsring eines Körpers K , das heißt, für jedes $x \neq 0$ aus K liegt x oder x^{-1} in R .

- (a) Zeige, dass $K = \text{Frac}(R)$.
- (b) Zeige, dass R ein lokaler Ring ist.
- (c) Sei x aus K Nullstelle eines normierten Polynomes mit Koeffizienten aus R . Zeige, dass x in R liegt.
- (d) Beschreibe alle Bewertungsringe einer beliebigen (möglicherweise unendlichen) algebraischen Erweiterung L von \mathbb{F}_p .

HINWEIS: Was ist der algebraische Abschluß von \mathbb{F}_p ?

- (e) Sei $U(R)$ die Einheitsgruppe von R . Auf der abelschen Gruppe $K^*/U(R)$ definiere:

$$x \cdot U(R) \leq y \cdot U(R) \text{ , falls } y \cdot x^{-1} \in R.$$

Zeige, dass \leq eine wohldefinierte lineare Ordnung ist, welche mit der Gruppenoperation in $K^*/U(R)$ kompatibel ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte).

Seien $K \subset L$ eine Körpererweiterung und R , bzw. S , ein Bewertungsring von K , bzw. L . Die Ringerweiterung $R \subset S$ ist eine *Bewertungsringweiterung*, falls $S \cap K = R$.

- (a) Zeige, dass $\mathfrak{M}_S \cap R = \mathfrak{M}_R$.
- (b) Schliesse daraus, dass die Bewertung ν_S , welche von S in L bestimmt wird, eine Fortsetzung der Bewertung ν_R von R auf K ist.

HINWEIS: Lässt sich $K^*/U(R)$ in $L^*/U(S)$ einbetten?

Aufgabe 3 (6 Punkte).

Sei R ein Integritätsbereich und \mathfrak{p} ein Primideal von R . Die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ von R auf \mathfrak{p} ist

$$R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a}{b} \in \text{Frac}(R) \mid b \notin \mathfrak{p} \right\}.$$

- (a) Zeige, dass $R_{\mathfrak{p}}$ lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ ist.
- (b) Zeige, dass $R \cap \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$.
- (c) Wir nehmen nun an, dass R ein Bewertungsring vom Körper K ist. Gegeben $R \subset S \subset K$, zeige, dass $S = R_{\mathfrak{p}}$ für ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$.

HINWEIS: Der Ring S ist auch ein Bewertungsring von K .

ABGABE DER ÜBUNGSBLÄTTER IN DEN BRIEFKASTEN 3.29 IM UG DER ERNST-ZERMELO-STRASSE 1. DIE ÜBUNGSBLÄTTER MÜSSEN BIS 10 UHR AM JEWEILS ANGEGEBENEN ABGABEDATUM EWINGEWORFEN WERDEN.