Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/2019

Bewertete Körper

Blatt 6

Abgabe: 3.12.2018

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

Sei R ein Teilring eines Körpers K derart, dass jedes Element aus K Nullstelle eines normierten Polynomes mit Koeffizienten aus R ist. Zeige, dass R ein Körper ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

Sei $p \neq 2$ eine Primzahl und α in $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$ eine $(p-1)$-te Einheitswurzel. Zeige, dass α in $\mathbb{Z}_p$ liegt.

HINWEIS: Manche Sätze wurden ohne Beweis in Briefen (oder am Rand von Büchern) geschrieben.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

Seien n eine natürliche Zahl und K ein bewerteter Körper mit Bewertungsring O_ν. Gegeben x in $U(O_\nu)$, zeige, dass x genau dann eine n-te Potenz in O_ν ist, wenn x eine n-te Potenz in K ist.

Aufgabe 4 (8 Punkte)**.**

Sei $p \neq 2$ eine Primzahl.

(a) Zeige, dass die Menge $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})^2$ offen in $\mathbb{Z}_p$ ist.

HINWEIS: Das Element p ist ein lokaler Parameter.

(b) Schließe daraus, dass der Index der Untergruppe $(\mathbb{Q}_p^*)^2$ in $\mathbb{Q}_p^*$ endlich ist.

HINWEIS: $\mathbb{Z}_p$ ist kompakt.

(c) Zeige, dass jede quadratische Erweiterung eines Körpers der Charakteristik ungleich 2 isomorph zum Zerfällungskörper eines Polynomes der Form $x^2 - a$ ist.

(d) Schließe daraus, dass $\mathbb{Q}_p$ nur endlich viele quadratischen Erweiterungen besitzt.

Abgabe der Übungsblätter in den Briefkasten 3.29 im UG der Ernst-Zermelo-Strasse 1. Die Übungsblätter müssen bis 10 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.