PD Dr. Markus Junker
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/19

Modelltheorie
Bonus-Übungsblatt
Abgabe[1]: 09.01.2019

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Sei T eine konsistente Theorie mit Quantorenelimination in einer endlichen Sprache $\mathcal{L}$, welche nur aus Relationssymbolen besteht. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Ryll-Nardzewski, dass T $\aleph_0$-kategorisch ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte).
Sei $\mathcal{L}$ eine überabzählbare Sprache, welche für jede natürliche Zahl n eine Konstante c_n und für jede Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ein einstelliges Funktionszeichen $\underline{f}$ enthält. Betrachten Sie die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{N}$ auf $\mathbb{N}$ mit $c_n^{\mathfrak{N}} = n$ und $\underline{f}^{\mathfrak{N}} = f$. Zeigen Sie, dass $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ $\aleph_0$-kategorisch, aber S_1^T unendlich ist.
Hinweis: Aufgabe 1, Blatt 4.

Aufgabe 3 (12 Punkte).
Wir betrachten lineare Ordnungen $(I, <)$ ohne Endpunkte mit einer dichten kodichten Teilmenge X. Das heißt, dass jedes nichtleere offene Intervall aus I ein Element in X und ein anderes in $I \setminus X$ besitzt.

a) Geben Sie eine Axiomatiserung T der Klasse dieser Strukturen in der Sprache $\mathcal{L} = \{<, P\}$ an, wobei $<$ ein zweistelliges Relationsymbol und P ein Prädikat ist. Zeigen Sie, dass T Quantorenelimination hat und vollständig ist.

b) Beschreiben Sie die Typen in S_n^T.

c) Schließen Sie daraus, dass T $\aleph_0$-kategorisch ist und geben Sie ein konkretes abzählbares Modell von T an.

d) Geben Sie zwei nicht-isomorphe Modelle von T der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ an.

Betrachten Sie nun eine abzählbare Theorie T' in der Sprache $\mathcal{L}$, deren Modelle $\mathfrak{M}$ lineare Ordnungen $(M, <^{\mathfrak{M}})$ zusammen mit einer unendlichen ko-unendlichen Teilmenge $P^{\mathfrak{M}}$ sind.

f) Sei $\mathfrak{M}$ ein Modell von T'. Zeigen Sie, dass $(M, <^{\mathfrak{M}})$ keine Endpunkte hat, falls $|S_1^{T'}| = 2$.

*g)** Nehmen Sie an, dass in jedem Modell $\mathfrak{M}$ von T' beide Teilmengen $P^{\mathfrak{M}}$ und $M \setminus P^{\mathfrak{M}}$ unbeschränkt sind. Zeigen Sie, dass T aus a) und T' genau dann äquivalent sind, wenn $|S_2^{T'}| = |S_2^T|$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass es ein nicht-leeres offenes Intervall gibt, das ein Element aus $P^{\mathfrak{M}}$ und eines aus $M \setminus P^{\mathfrak{M}}$ enthält.

(Bitte wenden)

[1] Abgabe der Übungsblätter im Flur der Abteilung für Mathematische Logik in der Ernst-Zermelo-Straße 1.

Aufhol-Übungen

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L} = \{<\}$ und $\mathcal{L}^+ = \{<\} \cup \{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit zweistelligen Relationssymbolen D_n. Sei $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, <)$ und $\mathfrak{Z}^+$ die Expansion von $\mathfrak{Z}$, in der $D_n^{\mathfrak{Z}^+} = \{(z_1, z_2) \mid |z_1 - z_2| = n\}$ gilt.

Zeigen Sie: $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$ hat keine Quantorenelimination, aber $T^+ = \mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$ hat Quantorenelimination.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L} = \{E\}$ und T die $\mathcal{L}$-Theorie, die besagt, dass E eine unendliche Äquivalenzrelation ist, wobei alle endlichen Klassen 2 oder 3 Elemente haben.

a) Skizzieren Sie eine Axiomatisierung von T

b) Bestimmen Sie alle abzählbaren Modelle von T.

c) Bestimmen Sie alle Vervollständigungen von T. Welche davon sind $\aleph_0$-kategorisch?

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller unendlichen Äquivalenzrelationen, deren endliche Klassen alle geradzahlig viele Elemente haben. Ist $\mathcal{K}$ eine elementare Klasse (also axiomatisierbar)?

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.**
Sei $\mathfrak{M}$ eine Struktur, $A \subseteq M$ und α ein Automorphismus von $\mathfrak{M}$, der A elementweise fixiert (d. h. $\alpha(a) = a$ für jedes $a \in A$). Zeigen Sie: Für alle $m \in M$ gilt $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(m/A) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\alpha(m)/A)$.

Aufgabe 8 (2 Punkte)**.**
Sei $\mathfrak{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, c ein Konstantenzeichen, das nicht in $\mathcal{L}$ liegt, und seien $m_1, m_2 \in M$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(m_1/\emptyset) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(m_2/\emptyset) \iff (\mathfrak{M}; m_1) \equiv (\mathfrak{M}; m_2),$$

wobei $(\mathfrak{M}; m_i)$ die $\mathcal{L} \cup \{c\}$-Struktur ist, die aus $\mathfrak{M}$ entsteht, indem man c durch m_i interpretiert.

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.**
Seien die gleichen Voraussetzungen wie in der vorigen Aufgabe gegeben, aber zusätzlich $\mathfrak{M}$ abzählbar und $\aleph_0$-saturiert. Zeigen Sie:

a) $(\mathfrak{M}; m_i)$ ist ebenfalls abzählbar und $\aleph_0$-saturiert.

b) Es gilt genau dann $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(m_1/\emptyset) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(m_2/\emptyset)$, wenn es einen Automorphismus α von $\mathfrak{M}$ gibt mit $\alpha(m_1) = m_2$.
Hinweis: Benutzen Sie die vorherigen Aufgaben.

Aufgabe 10 (6 Punkte)**.**
Betrachten Sie $T_1 := \mathrm{Th}(\mathbb{Z}, <)$ und $T_2 := \mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot)$.

Haben die beiden Theorien elementare Primmodelle und abzählbar saturierte Modelle? Sind die beiden Theorie $\aleph_0$-kategorisch?
Hinweis: Aufgabe 4.